

MATEMÁTICA FINANCEIRA:

NOTAS DE AULA

Alexandre B. Cunha

12 Sistemas de Amortização

12.1 Introdução

Dado um empréstimo de valor C , à taxa de juros i , de que forma ele pode ser quitado em n períodos?

Figura 12.1

Há uma infinidade de respostas. De fato, dados C e i , basta que o vetor de pagamento $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ satisfaça à igualdade

$$C = \sum_{t=1}^n \frac{X_t}{(1+i)^t}. \quad (12.1)$$

Estudaremos três soluções/sistemas:

1. Sistema de Amortização Americano (SAA);
2. Sistema de Amortização Francês (SAF);
3. Sistema de Amortização Constantes (SAC).

- Ordem definida por um critério didático.

Toda prestação é composta por duas parcelas: juros (J) e amortização (A). Desta forma,

$$X_t = J_t + A_t. \quad (12.2)$$

Vale ressaltar que

$$\sum_{t=1}^n A_t = C. \quad (12.3)$$

Denote por D_t o saldo devedor no fim da data t (após o pagamento da prestação X_t). Observe que $D_0 = C$, $D_n = 0$ e

$$D_t = C - \sum_{k=1}^t A_k. \quad (12.4)$$

Dados C e i , os sistemas diferem pelas regras utilizadas para determinar X_t , J_t e A_t . Todos os três sistemas satisfazem as seguintes condições: (12.1), (12.2), (12.3), (12.4), $D_0 = C$, $D_n = 0$ e

$$J_t = iD_{t-1}. \quad (12.5)$$

O exemplo abaixo será utilizado para ilustrar o funcionamento de cada um dos três sistemas de amortização. Para facilitar a exposição, adotou-se um prazo excepcionalmente curto.

Exemplo 12.1 Fulano contraiu um empréstimo de R\$ 100.000,00 à taxa de juros de 1% a.m. O empréstimo será quitado em quatro prestações mensais, sendo a primeira delas daqui a um mês.

12.2 O Sistema de Amortização Americano (SAA)

- Característica central: a amortização ocorre em uma única parcela na data n .

Figura 12.2

- $J_t = iC$; $A_1 = A_2 = \dots = A_{n-1} = 0$; $A_n = C$.
- Interpretação: bônus de cupom transacionado ao par.
 - A TIR é igual a i .

Tabela 12.1

12.3 O Sistema de Amortização Francês (SAF)

- No Brasil, O SAF também é chamado de *Tabela* (ou *Sistema*) *Price*.
- Característica central: prestações constantes.
 - Sim, isso foi estudado no tópico anterior.

Figura 12.3

$$X = \left[\frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \right]^{-1} C; \quad J_t = iD_{t-1}; \quad A_t = X - J_t$$

- Mais uma vez, a TIR é igual a i .

Tabela 12.2

12.4 O Sistema de Amortizações Constantes (SAC)

- Característica central: amortizações constantes.
- Bastante comum em financiamento imobiliários no Brasil.
- O valor da prestação decresce ao longo do tempo.
 - Lembre que $X_t = J_t + A_t$ e $J_t = iD_{t-1}$. O termo A_t é constante e J_t é decrescente.

$$A_t = \frac{C}{n}; \quad J_t = iD_{t-1}; \quad P_t = J_t + A_t$$

Figura 12.4

- Mais uma vez, a TIR é igual a i .
 - Utilize a Figura 12.4 para concluir que a última afirmativa é verdadeira.
- Vale ressaltar que

$$(1+i) \left[C - (n-1) \frac{C}{n} \right] = i \left[C - (n-1) \frac{C}{n} \right] + \frac{C}{n},$$

pois o termo entre colchetes é igual a C/n .

Tabela 12.3

12.5 Considerações Adicionais

12.5.1 Equivalência Financeira

À taxa de juros i , os sistemas são financeiramente equivalentes. Porém, isso dificilmente ocorrerá para outras taxas. A título de ilustração, considere o valor atual dos fluxos de caixa subjacentes ao SAA, SAF e SAC, para o Exemplo 12.1, utilizando as taxas de desconto de 0,5% a.m. e 1,5% a.m.

Tabela 12.4

12.5.2 Aspectos Tributários e Contábeis

As implicações da adoção de um dos sistemas também depende de fatores que fogem ao escopo desta disciplina. Nesse sentido, aspectos tributários e contábeis podem ser relevantes. A título de ilustração, considere o total de juros pagos (ou seja, o valor de $\sum_{t=1}^n J_t$) no financiamento do Exemplo 12.1: R\$ 4.000,00 no SAA, R\$ 2.512,44 no SAF e R\$ 2.500,00 no SAC.

12.5.3 Sistema(s) Misto(s)

Possivelmente, a abordagem mais simples consiste em tratar como se existissem múltiplos empréstimos.

12.5.4 O SAA com Fundo de Amortização

- *Fundo de amortização*: aportes periódicos realizados pelo devedor para fazer frente à amortização devida na data n .
 - Pode ser uma exigência contratual ou uma iniciativa do devedor.

Considere o Exemplo 12.1. Suponha que o devedor faça depósitos mensais de valor X' , os quais serão remunerados à taxa i (i.e., à taxa de juros do financiamento). Desta forma,

$$\frac{100.000}{1,01^4} = \frac{1 - 1,01^{-4}}{0,01} X' \implies X' = 24.628,11.$$

Agora, observe que $1.000 + 24.628,11 = 25.628,11$, que é exatamente o valor da prestação especificada pelo SAF. Essa conclusão ilustra um resultado geral: a combinação de (a) um financiamento, à taxa de juros i , pelo SAA com (b) um fundo de amortização, remunerado à taxa de juros i , com aportes constantes e com a mesma periodicidade das prestações do financiamento resulta em uma operação equivalente a um empréstimo, à taxa de juros i , regido pelo SAF.

- Generalização: a combinação de (a) um financiamento, à taxa de juros i , pelo SAA com (b) um fundo de amortização, remunerado à taxa de juros i' (distinta de i), com aportes constantes e com a mesma periodicidade das prestações do financiamento resulta em uma operação equivalente a um empréstimo regido pelo SAF (com uma taxa de juros a ser computada).

12.6 Indexação

Se o financiamento for indexado, então se especifica uma taxa de juros i' “acima” da variação do indexador. Considere mais uma vez o Exemplo 12.1. Assuma que há indexação e que $i' = 1\%$, $\theta_1 = 3\%$, $\theta_2 = 4\%$, $\theta_3 = 1\%$ e $\theta_4 = 2\%$. A nossa tarefa consiste em construir quadros de amortização similares às Tabelas 12.1, 12.2 e 12.3. Adotaremos duas abordagens. A primeira delas é mais trabalhosa, porém de fácil compreensão. A segunda é bem menos trabalhosa. Contudo, a lógica a ela subjacente é bem mais complexa.

A primeira abordagem consiste em implementar as seguintes duas ações:

1. No começo de cada período, corrija o saldo devedor pela variação do indexador no período anterior.
2. Em seguida, recalcule a prestação utilizando as regras do sistema de amortização adotado.

Seguem-se os quadros de amortização

Tabelas 12.5, 12.6 e 12.7

- Sim, há uma coluna redundante na Tabela 12.5. Porém, há um bom motivo para isso.
- Discutir como construir as tabelas.
- Observação sobre terminologia: *plano* vs *quadro*.
 - Essencialmente, o uso da palavra *plano* não é boa escolha para o caso em que há indexação.

O próximo passo consiste em motivar a segunda abordagem. Considere o SAA e a data 3. Observe que

$$1.000 \times 1,03 \times 1,04 \times 1,01 = 1.081,91,$$

$$0 \times 1,03 \times 1,04 \times 1,01 = 0$$

e

$$100.000 \times 1,03 \times 1,04 \times 1,01 = 108.191,20.$$

Agora, compare os resultados dessas operações com valores de X_3 , J_3 , A_3 e D_3 na Tabela 12.5.

Resultado similar pode ser obtido para o SAF. A título de ilustração, considere a data 2. Note que

$$25.628,11 \times 1,03 \times 1,04 = 27.452,83,$$

Matemática Financeira

$$\begin{aligned}753,72 \times 1,03 \times 1,04 &= 807,38, \\ 24.874,39 \times 1,03 \times 1,04 &= 26.645,45\end{aligned}$$

e

$$50.497,50 \times 1,03 \times 1,04 = 54.092,92.$$

Compare esses resultados com os valores de X_2 , J_2 , A_2 e D_2 na Tabela 12.6.

Considere agora o SAC na data 1. Observe que

$$\begin{aligned}26.000 \times 1,03 &= 26.780, \\ 1.000 \times 1,03 &= 1.030, \\ 25.000 \times 1,03 &= 25.750,\end{aligned}$$

e

$$75.000 \times 1,03 = 77.250,$$

valores idênticos a X_1 , J_1 , A_1 e D_1 na Tabela 12.7.

As conclusões acima não são uma mera coincidência. De fato, no caso do SAA, é possível utilizar a Tabela 12.1 para construir a Tabela 12.5. Para tanto, basta corrigir cada uma das linhas da Tabela 12.1 pela variação acumulada do indexador. O mesmo procedimento é válido para o SAF e o SAC.

Resta fornecer uma fundamentação teórica para essa abordagem. A fundamentação em questão tem duas partes. A primeira é muito simples: a multiplicação do saldo devedor e das prestações por uma mesma constante preserva a equivalência financeira previamente existente.

No tocante à segunda parte, por um momento desconsidere a indexação. Suponha que imediatamente após o pagamento da primeira prestação, o devedor e o credor decidam renegociar a dívida (sem alterar a taxa de juros i e data terminal n). Será que dado o saldo devedor D_1 , é possível manter as prestações remanescentes inalteradas (ou seja, iguais às prestações originalmente estabelecidas)? Observe que

$$D_1 = (1+i)D_0 - X_1.$$

Adicionalmente,

$$D_0 = C = \sum_{t=1}^n \frac{X_t}{(1+i)^t}.$$

Assim sendo,

$$\begin{aligned}D_1 &= (1+i) \sum_{t=1}^n \frac{X_t}{(1+i)^t} - X_1 = \sum_{t=1}^n \frac{X_t}{(1+i)^{t-1}} - X_1 = X_1 + \sum_{t=2}^n \frac{X_t}{(1+i)^{t-1}} - X_1 \\ &\implies D_1 = \sum_{t=2}^n \frac{X_t}{(1+i)^{t-1}}.\end{aligned}$$

A última igualdade implica que sim, é possível manter as prestações inalteradas. A mesma conclusão vale para as datas $2, 3, \dots, n - 1$. Concluimos então que a repactuação da dívida mantendo inalterada a taxa de juros e a data terminal permite que se preserve o sistema de amortização, pois não há necessidade de modificar as prestações subsequentes.

Dito isto, é possível combinar as duas partes para interpretar a introdução da indexação em um financiamento como a combinação, a cada período, de dois procedimentos:

- (a) da multiplicação do saldo devedor e das prestações por uma mesma constante;
- (b) uma repactuação da dívida, mantendo constantes a taxa de juros e a data terminal, que não altere o sistema de amortização.

Tabela 12.1

SAA – Plano de Amortização

t	X_t	J_t	A_t	D_t
0	-	-	-	100.000,00
1	1.000,00	1.000,00	0,00	100.000,00
2	1.000,00	1.000,00	0,00	100.000,00
3	1.000,00	1.000,00	0,00	100.000,00
4	101.000,00	1.000,00	100.000,00	0,00

Rascunho - cômputo da TIR no SAA

t	fluxo de caixa	TIR
0	-100.000,00	1,00000%
1	1.000,00	
2	1.000,00	
3	1.000,00	
4	101.000,00	

Tabela 12.2

SAF – Plano de Amortização

t	X_t	J_t	A_t	D_t
0	-	-	-	100.000,00
1	25.628,11	1.000,00	24.628,11	75.371,89
2	25.628,11	753,72	24.874,39	50.497,50
3	25.628,11	504,98	25.123,13	25.374,37
4	25.628,11	253,74	25.374,37	0,00

Rascunho - cômputo da TIR no SAF

t	fluxo de caixa	TIR
0	-100.000,00	1,00000%
1	25.628,11	
2	25.628,11	
3	25.628,11	
4	25.628,11	

Tabela 12.3

SAC – Plano de Amortização

t	X_t	J_t	A_t	D_t
0	-	-	-	100.000,00
1	26.000,00	1.000,00	25.000,00	75.000,00
2	25.750,00	750,00	25.000,00	50.000,00
3	25.500,00	500,00	25.000,00	25.000,00
4	25.250,00	250,00	25.000,00	0,00

Rascunho - cômputo da TIR no SAC

t	fluxo de caixa	TIR
0	-100.000,00	1,0000%
1	26.000,00	
2	25.750,00	
3	25.500,00	
4	25.250,00	

Tabela 12.4

Valores Atuais

i	SAA	SAF	SAC
0,5%	1.975,25	1.243,74	1.237,61
1,5%	-1.927,19	-1.219,41	-1.213,46

Tabela 12.5

SAA – Quadro de Amortização com Indexação

t	θ_t	X_t	J_t	A_t	$(1 + \theta_t)D_{t-1}$	D_t
0	-	-	-	-	-	100.000,00
1	3	1.030,00	1.030,00	0,00	103.000,00	103.000,00
2	4	1.071,20	1.071,20	0,00	107.120,00	107.120,00
3	1	1.081,91	1.081,91	0,00	108.191,20	108.191,20
4	2	111.458,57	1.103,55	110.355,02	110.355,02	0,00

Rascunho - cômputo da TIR real no SAA com indexação

t	fluxo de caixa	TIR
0	-110.355,02	1,0000%
1	1.103,55	
2	1.103,55	
3	1.103,55	
4	111.458,57	

TIR nominal: 3,5264%

Tabela 12.6

SAF – Quadro de Amortização com Indexação

t	θ_t	X_t	J_t	A_t	$(1 + \theta_t)D_{t-1}$	D_t
0	-	-	-	-	-	100.000,00
1	3	26.396,95	1.030,00	25.366,95	103.000,00	77.633,05
2	4	27.452,83	807,38	26.645,45	80.738,37	54.092,92
3	1	27.727,36	546,34	27.181,02	54.633,85	27.452,83
4	2	28.281,91	280,02	28.001,89	28.001,89	0,00

Rascunho - cômputo da TIR real no SAF com indexação

t	fluxo de caixa	TIR
0	-110.355,02	1,0000%
1	28.281,90	
2	28.281,91	
3	28.281,91	
4	28.281,91	

TIR nominal: 3,8271%

Tabela 12.7

SAC – Quadro de Amortização com Indexação

t	θ_t	X_t	J_t	A_t	$(1 + \theta_t)D_{t-1}$	D_t
0	-	-	-	-	-	100.000,00
1	3	26.780,00	1.030,00	25.750,00	103.000,00	77.250,00
2	4	27.583,40	803,40	26.780,00	80.340,00	53.560,00
3	1	27.588,76	540,96	27.047,80	54.095,60	27.047,80
4	2	27.864,65	275,89	27.588,76	27.588,76	0,00

Rascunho - cômputo da TIR real no SAC com indexação

t	fluxo de caixa	TIR
0	-110.355,02	1,0000%
1	28.692,31	
2	28.416,42	
3	28.140,54	
4	27.864,65	

TIR nominal: 3,8301%

Figura 12.1

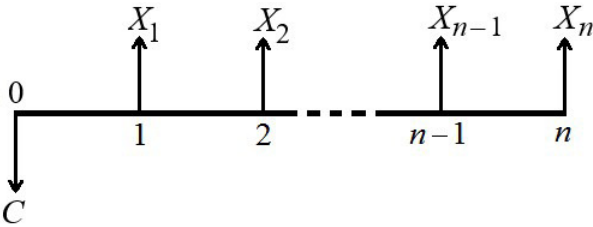


Figura 12.2

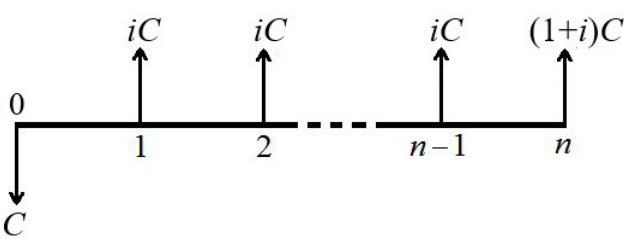


Figura 12.3

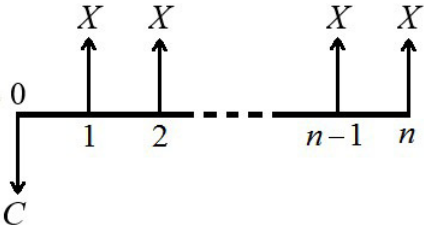


Figura 12.4

