

MATEMÁTICA FINANCEIRA:

NOTAS DE AULA

Alexandre B. Cunha

11 Sucessões de Pagamentos Periódicos e Constantes

11.1 Introdução

- Títulos comumente encontrados na literatura:
 - *Anuidades* (com ou sem a qualificação “constantes”)
 - *Sequências de Pagamentos* (com ou sem qualificações)
 - *Séries de Pagamentos* (com ou sem qualificações)
- Conforme o próprio título deixa claro, estudaremos neste tópico fluxos de caixa caracterizados por uma sucessão de pagamentos (ou recebimentos) de mesmo valor com uma dada periodicidade.
 - Utilizaremos a abreviatura SPPC.
- O pagamento periódico é usualmente denotado por P ou R . Porém, ambas as notações já foram utilizadas neste curso com outros significados. Por tal motivo, a variável em questão será denotada por X .

11.2 Classificação das Sucessões

11.2.1 Classificação com Base na Duração

Temporárias (ou finitas): n pagamentos, onde n é um número inteiro positivo.

Perpetúas (ou infinitas): infinidade de pagamentos.

11.2.2 Classificação com Base na Data do Primeiro Pagamento

Postecipada

Figura 11.1

Antecipada

Figura 11.2

Diferida

Figura 11.3

Observe que (i) m é o *prazo de diferimento* e (ii) há n pagamentos no fluxo de caixa ilustrado na Figura 11.3, pois $(m + n - 1) - m + 1 = n$.

11.3 Redução das SPPC ao Caso das SPPC Postecipadas

Estabeleceremos a seguir que no tocante à data do primeiro pagamento, podemos restringir, sem perda de generalidade, o estudo das SPPC ao caso das SPPC Postecipadas. Denote por W o valor atual de uma SPPC postecipada com n pagamentos de valor X . Logo,

$$W(i) = \sum_{k=1}^n \frac{X}{(1+i)^k}.$$

Denote o valor atual de uma SPPC antecipada com n pagamentos de valor X por W_A . Desta forma,

$$W_A(i) = X + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{X}{(1+i)^k} = (1+i) \left[\frac{X}{1+i} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{X}{(1+i)^{k+1}} \right].$$

Defina a variável auxiliar j de forma que $j = k + 1$. Isso permite concluir que

$$\begin{aligned} W_A(i) &= (1+i) \left[\frac{X}{1+i} + \sum_{j=2}^n \frac{X}{(1+i)^j} \right] = (1+i) \left[\sum_{j=1}^n \frac{X}{(1+i)^j} \right] = (1+i)W(i) \\ &\implies W_A(i) = (1+i)W(i) \end{aligned}$$

Consequentemente, sempre é possível expressar o valor atual W_A de uma SPPC antecipada como função do valor atual W de uma SPPC postecipada.

Agora, denote o valor atual de uma SPPC diferida por W_D . Assim sendo,

$$W_D(i) = \sum_{k=m}^{m+n-1} \frac{X}{(1+i)^k}.$$

Seja j a variável auxiliar tal que $j = k - m + 1$.

$$W_D(i) = \sum_{j=1}^n \frac{X}{(1+i)^{j+m-1}} = \frac{1}{(1+i)^{m-1}} \sum_{j=1}^n \frac{X}{(1+i)^j} \implies W_D(i) = \frac{1}{(1+i)^{m-1}} W(i).$$

Desta forma, podemos expressar W_D em termos de W .

11.4 Cômputo do Valor Atual de uma SPPC Postecipada

Inicialmente, observe que se $q \neq 1$, então

$$\sum_{k=1}^n q^k = \frac{q - q^{n+1}}{1 - q}. \quad (11.1)$$

Por outro lado,

$$W(i) = X \sum_{k=1}^n \frac{1}{(1+i)^k}.$$

Combine as duas últimas igualdades. Este procedimento estabelece que

$$\begin{aligned} W(i) &= X \frac{\frac{1}{1+i} - \left(\frac{1}{1+i}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{1+i}} \\ \implies W(i) &= X \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}. \end{aligned} \quad (11.2)$$

Vale ressaltar que a fração do lado direito da última igualdade é conhecida como *fator de valor atual* e frequentemente é denotado por $a_{n|i}$. Vários textos contêm tabelas com os seus valores.

11.5 Os Quatro Possíveis Tipos de Problema

Considere o fluxo de caixa ilustrado abaixo.

Figura 11.4

Há quatro possíveis tipos de problemas:

1. dados X , C e n , determinar i .
2. dados X , n e i , determinar C .
3. dados C , n e i , determinar X .
4. dados X , C e i , determinar n .

11.5.1 Problemas do Tipo 1

- Caso particular do problema de determinar a TIR de um fluxo de caixa.
 - TIR existe e é única.

Seja $V(i)$ o valor atual do fluxo de caixa ilustrado na Figura 11.4 e R a sua TIR. Observe que $V(i) = -C + W(i)$. Ademais,

- $C = nX \implies R = 0$
 - Lembre que se $\sum_{k=0}^n a_k = 0$, então $V(0) = 0$.
- $C < nX \implies R > 0$
 - Se $C < nX$, então $V(0) > 0$ e a função valor atual é decrescente.
- $C > nX \implies R < 0$
 - Se $C > nX$, então $V(0) < 0$ e a função valor atual é decrescente.

Exemplo 11.1 Fulano contraiu um empréstimo de R\$ 10 mil que será quitado em 12 prestações mensais sucessivas de R\$ 1 mil, sendo a primeira delas daqui a um mês. Calcule a taxa de juros i da operação.

Figura 11.5

Utilize a igualdade em (11.2) para concluir que

$$10.000 = 1.000 \frac{1 - (1 + i)^{-12}}{i}.$$

Não há solução analítica. Logo, é preciso recorrer a uma ferramenta como a HP 12C ou Excel para concluir que $i = 2,9229\%$ a.m.

Exemplo 11.2 Fulano deseja comprar um telefone celular. O aparelho está anunciado por R\$ 1.000,00. Se o pagamento for feito à vista por PIX, haverá um desconto de 10%. Também é possível parcelar a compra em 4 prestações mensais sucessivas “sem juros”, sendo a primeira delas devida no ato da compra. Calcule a taxa de juros i implícita no crediário.

Figura 11.6

Observe que

$$650 = 250 \frac{1 - (1 + i)^{-3}}{i}.$$

Mais uma vez, não há solução analítica. Utilize uma ferramenta como a HP 12C ou Excel para concluir que $i = 7,5111\%$ a.m.

11.5.2 Problemas do Tipo 2

Exemplo 11.3 Fulano possui sete títulos com valor nominal de R\$ 2 mil. Esses títulos têm vencimentos mensais sucessivos, sendo o primeiro vencimento daqui a um mês. Suponha que Fulano venda os títulos à taxa de 1% a.m. Calcule o valor a ser recebido por Fulano.

Figura 11.7

A igualdade em (11.2) implica que

$$C = 2.000 \frac{1 - (1 + 0,01)^{-7}}{0,01}.$$

Logo, Fulano receberá R\$ 13.456,39.

Exemplo 11.4 Fulano possui um título que pagará nove cupons de R\$ 40,00, sendo o primeiro deles daqui a cinco meses e os demais em intervalos sucessivos de seis meses. Adicionalmente, junto com o nono cupom o título pagará um valor adicional de R\$ 1.000,00. Suponha que Fulano venda o título à taxa de 0,5% a.m. Calcule o valor a ser recebido por Fulano.

Figura 11.8

- O título é um bônus com cupom semestral, sendo o seu valor de emissão R\$ 1.000 e a taxa de cupom 4% a.s.
 - Esta informação não é necessária para a resolução do problema.

Observe que

$$P = \frac{40}{(1 + 0,005)^5} + \frac{C}{(1 + 0,005)^5} + \frac{1.000}{(1 + 0,005)^{53}},$$

onde

$$C = 40 \frac{1 - (1 + i_s)^{-8}}{i_s},$$

sendo que i_s satisfaz a igualdade $1 + i_s = (1 + 0,005)^6$. Logo, i_s é a taxa semestral equivalente à taxa mensal de 0,5% e C é o valor na data 5 da SPPC composto por 8 pagamentos semestrais de R\$ 40,00. Concluímos então que $P = 1.080,16$.

1.087,07

- Comentários sobre o uso da HP 12C e do Excel para calcular P de forma “direta” (ou seja, somente digitando os recebimentos, a taxa de juros de 0,5% a.m e solicitando o cálculo do valor atual).
 - HP 12C: possível, porém trabalhoso.
 - Excel: tarefa simples.

11.5.3 Problemas do Tipo 3

Exemplo 11.5 A quantia de R\$ 42.000,00 foi financiada em 10 prestações mensais sucessivas, a primeira delas devida daqui a um mês, à taxa de 1,2% a.m. Calcule o valor da prestação.

Figura 11.9

Rascunho

$$42.000 = X \frac{1 - (1 + 0,012)^{-10}}{0,012} \implies X = 4.482,16$$

Exemplo 11.6 Um apartamento está sendo vendido por R\$ 2 milhões, sendo que é preciso pagar uma entrada de 40% do referido valor. O restante é financiado à taxa de juros de 0,9% a.m. pelo prazo de 15 anos em prestações mensais sucessivas. A primeira dessas prestações é devida daqui a um mês. Calcule o valor da prestação.

Figura 11.4

Rascunho $n = 12 \times 15 = 180$ $C = (1 - 0,4) \times 2.000.000 = 1.200.000$

$$1.200.000 = X \frac{1 - (1 + 0,009)^{-180}}{0,009} \implies X = 13.488,84$$

11.5.4 Problemas do Tipo 4

Considere o fluxo de caixa ilustrado na Figura 11.4. A igualdade em (11.2) implica que

$$C = X \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}.$$

Assim sendo,

$$\begin{aligned} \frac{iC}{X} &= 1 - \frac{1}{(1 + i)^n} \implies \frac{1}{(1 + i)^n} = \frac{X - iC}{X} \\ \implies (1 + i)^n &= \frac{X}{X - iC} \implies n \ln(1 + i) = \ln \left(\frac{X}{X - iC} \right) \\ \implies n &= \frac{\ln \left(\frac{X}{X - iC} \right)}{\ln(1 + i)}. \end{aligned} \tag{11.3}$$

Observe que para n estar bem definido, é preciso que $X > iC$ (ou seja, a prestação precisa ser maior do que os juros acumulados entre as datas 0 e 1).

Dados C , X e i , usualmente a avaliação de n conforme especificado em (11.3) resultará em um número que não é inteiro. Apresentam-se abaixo duas possíveis soluções para esse problema.

A. Truncar a resposta de forma a obter um número inteiro e aumentar o valor da última prestação de forma que haja equivalência financeira entre C e as prestações.

B. Truncar a resposta de forma a obter um número inteiro e criar uma prestação residual de forma que haja equivalência financeira entre C e as prestações.

Exemplo 11.7 *Uma televisão cujo preço à vista é igual a R\$ 5 mil será financiada em prestações mensais sucessivas de R\$ 500,00 à taxa de juros de 2% a.m. A primeira prestação é devida no ato da compra. Determine o número de prestações.*

Figura 11.10

Observe que o número de prestações é igual a $n + 1$. Dito isto, aplique a igualdade em (11.3). Tal procedimento estabelece que

$$n = \frac{\ln \left(\frac{500}{500 - 0,02 \times 4.500} \right)}{\ln 1,02} \implies n \cong 10,02.$$

Solução A Denote o acréscimo na última prestação por z .

Figura 11.11

Assim sendo,

$$4.500 = 500 \frac{1 - 1,02^{-10}}{0,02} + \frac{z}{1,02^{10}} \implies z = 10,61.$$

Concluimos então que haverá onze prestações, sendo as dez primeiras de R\$ 500,00 e a última de R\$ 510,61.

Solução B Denote o valor da prestação residual por z' .

Figura 11.12

Observe que

$$4.500 = 500 \frac{1 - 1,02^{-10}}{0,02} + \frac{z'}{1,02^{11}} \implies z' = 10,83.$$

Logo, haverá doze prestações, sendo as onze primeiras de R\$ 500,00 e a última de R\$ 10,83.

11.6 Perpetuidades

Se uma SPPC tem uma infinidade de pagamentos, então ela é uma *perpetuidade*.

- *Uk government consol*: emitido pela primeira vez 1751. Em 2015 o governo do Reino recomprou todos os títulos desse tipo em circulação.
 - Ver website <https://fredblog.stlouisfed.org/2016/07/consols-the-never-ending-bonds/>.

Segue-se uma ilustração gráfica de uma perpetuidade postecipada.

Figura 11.13

Há também as perpetuidades antecipadas e as diferidas. Contudo, assim como no caso das SPPC finitas, é suficiente estudar as postecipadas.

Seja W o valor atual da perpetuidade ilustrada na Figura 11.13. Desta forma,

$$W(i) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{X}{(1+i)^k} \implies W(i) = X \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^k}.$$

Agora, na expressão (11.1), assumamos que $|q| < 1$ e façamos $n \rightarrow \infty$. Conclui-se que

$$\sum_{k=1}^{\infty} q^k = \frac{q}{1-q}.$$

Logo, para $i > 0$ (manteremos essa hipótese ao longo desta subseção),

$$\begin{aligned} W(i) &= X \frac{\frac{1}{1+i}}{1 - \frac{1}{1+i}} = X \frac{1}{1+i-1} \\ &\implies W(i) = \frac{X}{i}. \end{aligned}$$

Ou seja, $X = iW(i)$. Essa última igualdade pode ser facilmente interpretada.

Exemplo 11.8 Suponha que o valor mensal dos gastos de manutenção de um imóvel é igual a R\$ 200,00. Esse mesmo imóvel pode ser alugado por R\$ 2.000,00 mensais, sendo os encargos de manutenção responsabilidade do proprietário. Assumindo que o imóvel tem vida útil infinita e que a taxa de juros relevante é de 0,5% a.m., calcule o preço mínimo $P_{\min}$ pelo qual o proprietário deve colocar o imóvel à venda.

Figura 11.14

Rascunho

$$P_{\min} = \frac{X}{i} = \frac{1.800}{0,005} \implies P_{\min} = 360.000$$

Exemplo 11.9 Suponha que o valor mensal do aluguel (líquido de encargos, impostos, gastos de manutenção etc.) de um imóvel é igual a R\$ 1.500,00. Adote a taxa de 1% a.m. Calcule o valor atual do fluxo de aluguéis nas seguintes situações: (A) a vida útil do imóvel é infinita e (B) a vida útil do imóvel é igual a 50 anos.

Rascunho A

Figura 11.15

$$W = \frac{X}{i} = \frac{1.500}{0,01} \implies W = 150.000$$

Rascunho B

Figura 11.16

$$n = 50 \times 12 \implies n = 600$$

$$W = X \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} = 1.500 \frac{1 - (1 + 0,01)^{-600}}{0,01} \implies W = 149.616,94$$

- O fato de os valores obtidos em A e B serem próximos não é uma mera coincidência.

Figura 11.1

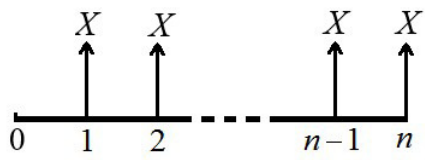


Figura 11.2

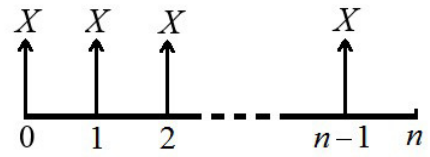


Figura 11.3

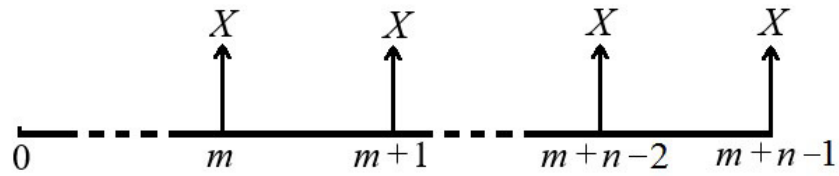


Figura 11.4

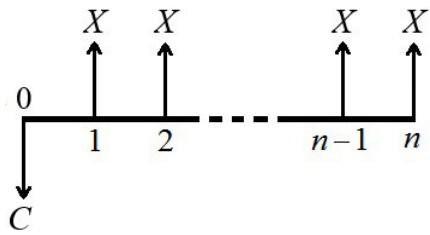


Figura 11.5

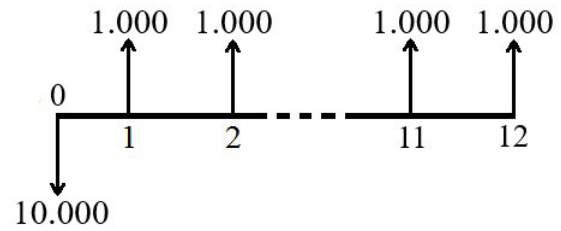


Figura 11.6

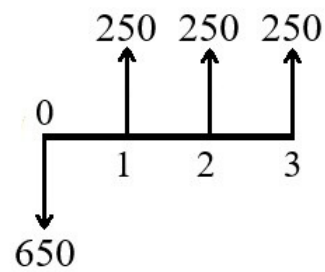
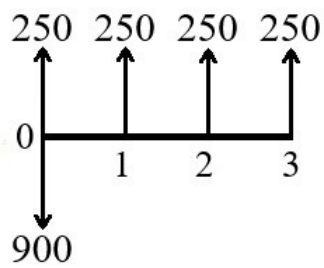


Figura 11.7

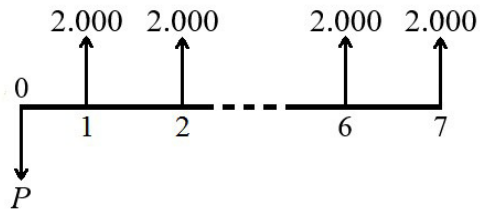


Figura 11.8

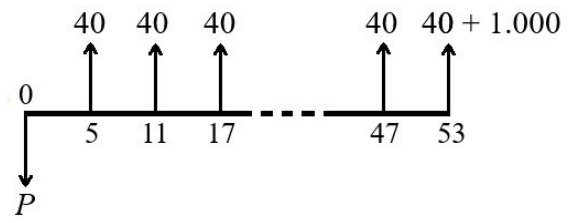


Figura 11.9

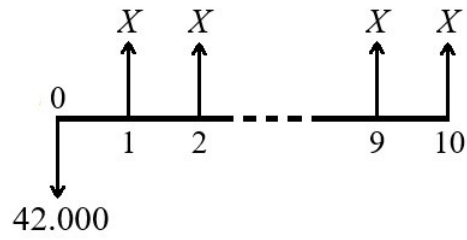


Figura 11.10

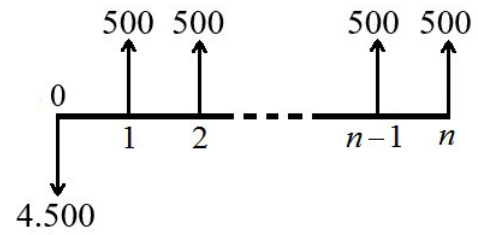


Figura 11.11

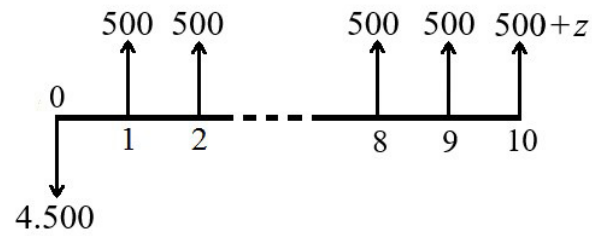


Figura 11.12

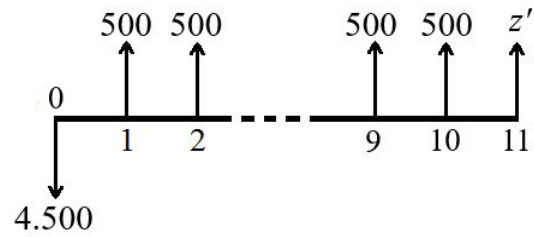


Figura 11.13

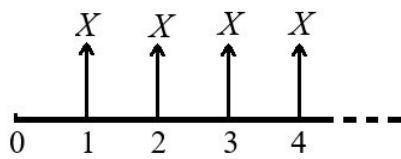


Figura 11.14

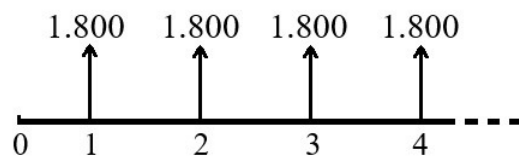


Figura 11.15

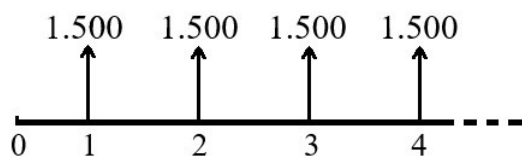


Figura 11.16

