

MATEMÁTICA FINANCEIRA: NOTAS DE AULA

Alexandre B. Cunha

10 Títulos Públicos Federais

10.1 Introdução

Discutiremos neste tópico operações com títulos da dívida pública federal. Mais especificamente, estudaremos os seguintes títulos:

- Letra do Tesouro Nacional;
 - LTN, Tesouro Prefixado
- Letra Financeira do Tesouro;
 - LFT, Tesouro Selic
- Nota do Tesouro Nacional - Série B (Principal);
 - NTN-B Principal, Tesouro IPCA+ Principal
- Nota do Tesouro Nacional - Série B (Semestral).
 - NTN-B Semestral, Tesouro IPCA+ com Juros Semestrais

10.2 Teoria: Títulos Vendidos com Desconto

Suponha que um título com valor nominal (ou seja, de resgate) N , com vencimento n períodos à frente, seja vendido ao preço P .

Figura 10.1

Evidentemente, caso o título seja carregado até o vencimento, a taxa i de rentabilidade (implícita) será dada por

$$N = P(1 + i)^n.$$

Observe que ao invés de se especificar o preço P , é possível se especificar a taxa i . Nesse caso, o preço do título será dado por

$$P = \frac{N}{(1 + i)^n}. \quad (10.1)$$

10.3 LTN

Cada LTN tem um valor nominal igual a R\$ 1.000,00. O título é vendido com deságio/desconto. O chamado *preço unitário* (PU) é o preço de um título. As transações com LTN são realizadas com base em uma taxa de juros anual. Ou seja, o vendedor e o comprador estabelecem uma taxa de rentabilidade anual à qual o título será transacionado. Dada esta taxa, utiliza-se o número de dias úteis até o vencimento do título para computar o seu PU. Assume-se, conforme já discutido nesta disciplina, que um ano tem 252 dias úteis. Assim sendo, é preciso conciliar a expressão (10.1) com as convenções brasileiras. Isto é,

$$P = \frac{1.000}{\left[(1 + i_a)^{\frac{1}{252}}\right]^n}, \quad (10.2)$$

onde i_a é a taxa anual à qual o título foi transacionado e n é o prazo, em dias úteis, até o seu vencimento.

Exemplo 10.1 (Meramente ilustrativo. Em particular, ignoraremos as convenções para truncamento e número de decimais.) Fulano comprou uma LTN com vencimento daqui a 40 dias úteis. O título foi transacionado à taxa de 13,2574%. Calcule o PU (P).

Basta aplicar a igualdade (10.2). Ou seja,

$$P = \frac{1.000}{\left(1 + \frac{13,2574}{100}\right)^{40/252}}.$$

Logo, o preço unitário é igual a R\$ 984,43.

- **Convenção:** o preço unitário de uma LTN deve ser calculado com truncagem na sexta decimal.
 - Exceção: Tesouro Direto, truncagem na segunda casa decimal.
- Comentar: taxa de custódia e tributação (IOF e IR em 2026).

Exemplo 10.2 De acordo com informações disponibilizadas pela ANBIMA, em 11 de setembro de 2026 a taxa indicativa e o PU indicativo da LTN com vencimento em 1º de outubro de 2026 foram iguais a, respectivamente, 13,7662% e 992,860316. Verifique se ao utilizar a taxa aqui informada, você obtém o mesmo PU.

Mais uma vez, é suficiente aplicar a igualdade (10.2). Há 14 dias úteis no período em análise. Assim sendo,

$$P = \frac{1.000}{\left(1 + \frac{13,7662}{100}\right)^{14/252}} = 992,8603166.$$

Aplicando a regra de truncagem na sexta casa decimal, concluímos que o preço unitário é igual a R\$ 992,860316.

Exemplo 10.3 De acordo com informações disponibilizadas pela ANBIMA, em 9 de setembro de 2026 a taxa indicativa e o PU indicativo da LTN com vencimento em 1º de julho de 2028 foram iguais a, respectivamente, 13,7280% e 793,545246. Verifique se ao utilizar a taxa aqui informada, você obtém o mesmo PU.

Como o dia 1º de julho de 2028 cai em um sábado, a data efetiva de vencimento é 3 de julho de 2028. Dito isto, há 453 dias úteis no período em análise. Adicionalmente,

$$P = \frac{1.000}{\left(1 + \frac{13,7280}{100}\right)^{453/252}} = 793,5452465.$$

Logo, o preço unitário é igual a R\$ 793,545246.

Exemplo 10.4 De acordo com informações disponibilizadas pelo Tesouro Direto, em 8 de setembro de 2026 a taxa de venda e o PU de venda das LTN com vencimento em 1º de janeiro de 2027 foram iguais a, respectivamente, 13,65% e 960,68. Verifique se ao utilizar a taxa aqui informada você obtém o mesmo PU.

Tendo em vista que 1º de janeiro de 2027 é feriado e cai em uma sexta-feira, a data efetiva de vencimento é 4 de janeiro de 2027. Desta forma, há 79 dias úteis no período em análise. Adicionalmente,

$$P = \frac{1.000}{\left(1 + \frac{13,65}{100}\right)^{79/252}} = 960,6814865.$$

Concluímos então que o preço unitário é igual a R\$ 960,68.

- No mesmo dia, a taxa de compra e o PU de compra do título em questão eram respectivamente iguais a 13,53% e 961,48. Contudo,

$$\frac{1.000}{\left(1 + \frac{13,53}{100}\right)^{79/252}} = 960,9997011.$$

Por outro lado,

$$\frac{1.000}{\left(1 + \frac{13,53}{100}\right)^{78/252}} = 961,4837429.$$

- Comentar “liquidação no dia útil subsequente”.

10.4 Teoria: Títulos Sem Juros de Cupom

- O seu professor evitou deliberadamente utilizar a expressão “zero-coupon bond”.
- Estamos interessados nos títulos indexados. Porém, por razões didáticas, discutiremos inicialmente os não indexados.
- A exposição leva em consideração algumas das especificidades dos títulos da dívida pública do Brasil.

10.4.1 Títulos Não Indexados

Considere um título (não indexado) com valor de emissão C , prazo de resgate n e taxa de juros i . Desta forma,

$$S = C(1 + i)^n. \quad (10.3)$$

Seja P o preço ao qual o título é transacionado na data 0.

Figura 10.2

Observe que P não necessariamente será igual a C .

- Se $P = C$, então o título foi transacionado *ao par*.
- Se $P < C$, então o título foi transacionado com *deságio*.
- Se $P > C$, então o título foi transacionado com *ágio*.

Se o título for carregado até o vencimento, a TIR da operação será tal que

$$S = P(1 + R)^n. \quad (10.4)$$

Combine as igualdades (10.3) e (10.4) para concluir que

$$P = C \left(\frac{1 + i}{1 + R} \right)^n. \quad (10.5)$$

Logo, em vez de se especificar o preço P , é possível especificar a TIR e utilizar a última igualdade para determinar P .

Defina a variável auxiliar α de forma que

$$1 + R = (1 + i)(1 + \alpha).$$

- Interpretação de α .

Combine a última igualdade com (10.5). Esse procedimento estabelece que

$$P = \frac{C}{(1 + \alpha)^n}.$$

Assim sendo, dada a taxa α , P é determinado pela expressão acima.

- $\alpha = 0 \iff P = C$ (ao par)
- $\alpha > 0 \iff P < C$ (deságio)
- $\alpha < 0 \iff P > C$ (ágio)

10.4.2 Títulos Indexados

Considere um título (indexado) com valor de emissão C , prazo de resgate n e taxa de juros (acima da variação do indexador) i' . Conforme discutido no Tópico 9, o montante S será tal que

$$S = C(1 + \theta_{0,n})(1 + i')^n, \quad (10.6)$$

onde $\theta_{0,n}$ é a taxa de variação do indexador I entre as datas 0 e n . Mais uma vez, denote o preço do título na data 0 por P . A Figura 10.2 e os conceitos de ágio, deságio e ao par são válidos no presente contexto.

Se o título for carregado até o vencimento, a TIR nominal da operação será dada pela igualdade (10.4). Combine essa expressão com (10.6). Esse procedimento estabelece que

$$C(1 + \theta_{0,n})(1 + i')^n = P(1 + R)^n.$$

Denote por $\bar{\theta}$ a taxa de variação média do indexador durante o período em análise. Como $(1 + \theta_{0,n}) = (1 + \bar{\theta})^n$, concluímos que

$$P = C \left[\frac{(1 + i')^n}{\left(\frac{1+R}{1+\bar{\theta}}\right)^n} \right].$$

Porém, conforme discutido no Tópico 8,

$$1 + R = (1 + r)(1 + \bar{\theta}), \quad (10.7)$$

onde r é a TIR “real”.

- Comentários:
 - A taxa r será uma TIR real desde que se aceite o indexador como uma medida de inflação.
 - Conforme discutido no Tópico 8, algumas condições precisam ser satisfeitas para que a igualdade (10.7) seja válida.
 - * A condição “um desembolso, um recebimento” é satisfeita.

Desta forma,

$$P = C \left(\frac{1 + i'}{1 + r} \right)^n.$$

Logo, em vez de se especificar o preço P , é possível especificar a taxa r e utilizar a última igualdade para determinar P .

Defina a variável auxiliar γ de forma que

$$1 + r = (1 + i')(1 + \gamma).$$

- Interpretação de γ .

Combine as duas últimas igualdades para concluir que

$$P = \frac{C}{(1 + \gamma)^n}. \quad (10.8)$$

Assim sendo, dada a taxa γ , P é determinado pela expressão acima.

- $\gamma = 0 \iff P = C$ (ao par)
- $\gamma > 0 \iff P < C$ (deságio)
- $\gamma < 0 \iff P > C$ (ágio)

10.5 LFT

As LFT são tratadas como se tivessem sido emitidas no dia 1º de julho de 2000 com um valor nominal (naquela data) de R\$ 1.000,00. Esse valor nominal é corrigido diariamente pela taxa Selic over. Esse procedimento gera o valor nominal atualizado (VNA) do título. Logo, as LFT são indexadas à taxa Selic Over.

A nossa próxima tarefa consiste entender como as LFT se adequam à estrutura teórica apresentada na Subseção 10.4.2. Inicialmente, observe que no caso das LFT, $i' = 0$. Ou seja, o título não paga juros acima da variação do indexador. Denote o VNA em uma data t genérica por N_t . Desta forma, $C = N_0$.

- Importante: 0 é a data em que o título é transacionado, a qual usualmente é diferente de 1º de julho de 2000.

Ademais, esses títulos são transacionados com base em uma taxa anual que especifica rendimentos acima da (taxa positiva) ou abaixo da (taxa negativa) ou igual à (taxa nula) taxa Selic. Assim como no caso das LTN, a taxa acertada pelas partes é utilizada para computar o preço unitário. Utiliza-se a convenção de que um ano tem 252 dias úteis. Dito isto, resta conciliar a igualdade (10.8) com os procedimentos acima detalhados. Tem-se, então, que

$$P = \frac{N_0}{\left[(1 + \gamma_a)^{\frac{1}{252}}\right]^n}, \quad (10.9)$$

onde γ_a é a taxa anual à qual o título foi transacionado e n é o prazo, em dias úteis, até o seu vencimento.

- Lembre que γ_a é a taxa anual “acima” da Selic.

Conforme já mencionado, o termo N_0 corresponde ao valor nominal atualizado. A fração

$$\frac{1}{(1 + \gamma_a)^{n/252}} \quad (10.10)$$

é denominada de *cotação* do título e será denotada por Q . Logo, o preço unitário P é dado por

$$P = N_0 Q. \quad (10.11)$$

Por fim, observe que:

- $Q = 1 \iff \gamma_a = 0 \iff P = N_0$ (ao par)
- $Q < 1 \iff \gamma_a > 0 \iff P < N_0$ (deságio)
- $Q > 1 \iff \gamma_a < 0 \iff P > N_0$ (ágio)

Exemplo 10.5 (Meramente ilustrativo. Em particular, ignoraremos as convenções para truncamento e número de decimais.) Fulano comprou uma LFT com vencimento daqui a 47 dias úteis. O seu VNA (N_0) era igual a 16.000,00. O título foi transacionado à taxa de 0,0100%. Calcule a cotação (Q) e o PU (P).

Rascunho

$$Q = \frac{1}{(1 + \gamma_a)^{n/252}} = \frac{1}{\left(1 + \frac{0,0100}{100}\right)^{47/252}} \implies Q = 99,9981\%$$

$$P = N_0 Q \implies P = 16.000 \times \frac{99,9981}{100} \implies P = 15.999,70$$

- **Convenção:** o preço unitário de uma LFT deve ser calculada com truncagem na sexta decimal.
 - Exceção: Tesouro Direto, truncagem na segunda casa decimal.
- **Convenção:** a cotação (na forma percentual) de uma LFT deve ser calculado com truncagem na quarta decimal.

Exemplo 10.6 De acordo com informações disponibilizadas pela ANBIMA, em 15 de setembro de 2025 o VNA, a taxa indicativa e o PU indicativo da LFT com vencimento em 1º de setembro de 2026 foram iguais a, respectivamente, 17.353,385318, 0,0006% e 17.353,281197. Calcule a cotação. Em seguida, verifique se você obtém o mesmo PU.

Inicialmente, observe que há 242 dias úteis no período em análise. Dito isto, a cotação é tal que

$$Q = \frac{1}{\left(1 + \frac{0,0006}{100}\right)^{242/252}} \implies Q = 99,9994\%.$$

Com relação ao PU,

$$P = 17.353,385318 \times \frac{99,9994}{100} \implies P = 17.353,281197$$

- Foi preciso utilizar o Excel na última conta (cálculo do PU) para obter o resultado com a precisão desejada, pois a quantidade de dígitos no visor da HP 12C não era suficiente.

Exemplo 10.7 De acordo com informações disponibilizadas pela ANBIMA, em 9 de setembro de 2026 o VNA, a taxa indicativa e o PU indicativo da LFT com vencimento em 1º de março de 2027 foram iguais a, respectivamente, 19.834,111359, 0,0042% e 19.833,714676. Calcule a cotação. Em seguida, verifique se você obtém o mesmo PU.

O período em análise contém 116 dias úteis. Desta forma,

$$Q = \frac{1}{\left(1 + \frac{0,0042}{100}\right)^{116/252}} \implies Q = 99,9980\%.$$

Adicionalmente,

$$P = 19.834,111359 \times \frac{99,9980}{100} \implies P = 19.833,714676.$$

- Mais uma vez, foi preciso utilizar o Excel para calcular o PU.

Exemplo 10.8 De acordo com informações disponibilizadas pelo Tesouro Direto, em 9 de setembro de 2026 a taxa de venda e o PU de venda da LFT com vencimento em 1^o de março de 2027 foram iguais a, respectivamente, 0,0120% e R\$ 19.833,00. Adicionalmente, conforme discutido no Exemplo 10.7, o VNA do título era igual a 19.834,111359. Calcule a cotação. Em seguida, verifique se você obtém o mesmo PU.

Conforme discutido no Exemplo 10.7, há 116 dias úteis no período em questão. Assim sendo,

$$Q = \frac{1}{\left(1 + \frac{0,0120}{100}\right)^{116/252}} \implies Q = 99,9944\%.$$

Ademais,

$$P = 19.834,111359 \times \frac{99,9944}{100} \implies P = 19.833,00.$$

- De novo, foi preciso utilizar o Excel para calcular o PU.
 - Mesmo que isso ocorra novamente, o comentário acima não será repetido.
- No mesmo dia, a taxa de compra e o PU de compra do título eram respectivamente iguais a 0,0020% e 19.844,22. A exemplo do ocorrido na discussão imediatamente subsequente ao Exemplo 10.4, é preciso subtrair 1 do número de dias úteis. Assim sendo,

$$Q = \frac{1}{\left(1 + \frac{0,0020}{100}\right)^{115/252}} \implies Q = 99,9990\%.$$

Além disso, o Tesouro utiliza a meta anual da taxa Selic para projetar o VNA do dia subsequente. No dia 9 de setembro de 2026 a referida taxa era igual a 14,00%. Tendo em vista que

$$19.834,111359 \times (1 + 0,14)^{1/252} = 19.844,426854,$$

podemos concluir que

$$P = 19.844,426854 \times \frac{99,9990}{100} \implies P = 19.844,22.$$

Aparentemente, não há uma série completa do VNA das LFT disponível (pelo menos gratuitamente) nos sites do BCB, da ANBIMA e do Tesouro.

- A ANBIMA divulga os valores para os cinco últimos dias.

Contudo, é possível utilizar os fatores acumulados da SELIC divulgados pelo BCB para avaliar o dito VNA com precisão.

- O seu professor conferiu em algumas datas (usando a regra de truncagem na sexta casa decimal).

10.6 NTN-B Principal

De forma similar às LFT, as NTN-B são tratadas como se tivessem sido emitidas no dia 15 de julho de 2000 com um valor nominal (naquela data) de R\$ 1.000,00. Esse valor nominal é corrigido diariamente pelo IPCA, obtendo-se assim o VNA do título.

- Estritamente falando, utiliza-se o IPCA propriamente dito para calcular o VNA a cada dia 15. Para os demais dias, utiliza-se uma projeção do VNA.
 - Utiliza-se o IPCA com defasagem de um mês.
- A exemplo do ocorrido com o VNA das LFT, o seu professor não conseguiu localizar uma série completa com o VNA das NTN-B. Todavia, é possível utilizar o IPCA para computar o VNA a cada dia 15.
- A NTB-B Principal e a Semestral possuem o mesmo VNA.

A exemplo do procedimento adotado ao estudar a LFT, iremos analisar como a NTN-B Principal se adequa ao conteúdo da Subseção 10.4.2. Como esse título não paga juros acima da variação do indexador, $i' = 0$. Mais uma vez, o VNA em uma data t genérica é denotado por N_t . Assim sendo, $C = N_0$, sendo que a data 0 não necessariamente é igual ao dia 15 de julho de 2000.

Assim como a LTN e a LFT, a NTN-B é transacionada com base em uma taxa anual. Essa taxa, que especifica rendimentos acima da (taxa positiva) ou abaixo da (taxa negativa) ou igual à (taxa nula) taxa de variação do IPCA, é utilizada para computar o PU. Adota-se a já mencionada convenção de que um ano tem 252 dias úteis. Por fim, é preciso conciliar esses procedimentos com a expressão (10.8). Alcança-se esse objetivo com a igualdade (10.9), onde, mais uma vez, γ_a é a taxa anual à qual o título foi transacionado e n é o prazo, em dias úteis, até o seu vencimento. A cotação Q é dada pela expressão (10.10), ao passo que P , N_0 e Q satisfazem a igualdade (10.11). Concluindo, exatamente como no caso da LFT, as afirmativas abaixo são válidas.

- $Q = 1 \iff \gamma_a = 0 \iff P = N_0$ (ao par)
- $Q < 1 \iff \gamma_a > 0 \iff P < N_0$ (deságio)
- $Q > 1 \iff \gamma_a < 0 \iff P > N_0$ (ágio)

Exemplo 10.9 (Meramente ilustrativo. Em particular, ignoraremos as convenções para truncamento e número de decimais.) Fulano comprou uma NTN-B Principal com vencimento daqui a 642 dias úteis. O seu VNA (N_0) era igual a 2.527,00. O título foi transacionado à taxa de 3%. Calcule a cotação (Q) e o PU (P).

Rascunho

$$Q = \frac{1}{(1 + \gamma_a)^{n/252}} = \frac{1}{\left(1 + \frac{3}{100}\right)^{642/252}} \implies Q = 92,7461\%$$

$$P = N_0 Q \implies P = 2.527 \times \frac{92,7461}{100} \implies P = 2.343,69$$

O seu professor não localizou informações sobre taxa e PU da NTN-B Principal no site da ANBIMA. Por tal motivo, os demais exemplos desta subseção utilizam dados obtidos no site do Tesouro Direto.

Exemplo 10.10 De acordo com informações disponibilizadas pelo Tesouro Direto, em 15 de setembro de 2026 a taxa de venda e o PU de venda da NTN-B Principal com vencimento em 15 de maio de 2029 foram iguais a, respectivamente, 7,59% e R\$ 3.898,71. De acordo com a ANBIMA, o VNA desse título era igual a 4.727,570573. Calcule a cotação. Em seguida, verifique se você obtém o mesmo PU.

Rascunho $n = 664$

$$Q = \frac{1}{(1 + \gamma_a)^{n/252}} = \frac{1}{\left(1 + \frac{7,59}{100}\right)^{664/252}} \implies Q = 82,4676\%$$

$$P = N_0 Q \implies P = 4.727,570573 \times \frac{82,4676}{100} \implies P = 3.898,71$$

- Aparentemente, exceto pelos dias 15, o VNA utilizado pelo Tesouro Direto é diferente do VNA divulgado pela ANBIMA.
 - O seu professor não localizou uma série completa do VNA no site do Tesouro Direto.

Exemplo 10.11 De acordo com informações disponibilizadas pelo Tesouro Direto, em 14 de setembro de 2026 a taxa de compra e o PU de compra da NTN-B Principal com vencimento em 15 de maio de 2029 foram iguais a, respectivamente, 7,55% e R\$ 3.902,53. Será que é possível obter o mesmo PU?

Sim. Lembre que no Tesouro Direto, para obter PU de compra é preciso subtrair 1 do número de dias úteis e utilizar o VNA (ou uma projeção do VNA) do dia subsequente. Combine o enunciado deste exemplo com a resolução do exemplo anterior para concluir que $n = 664$. Dito isto, utilizaremos o VNA do dia 15 (também informado no exemplo anterior).

Rascunho

$$Q = \frac{1}{\left(1 + \frac{7,55}{100}\right)^{664/252}} \implies Q = 82,5484\%$$

$$P = 4.727,570573 \times \frac{82,5484}{100} \implies P = 3.902,53$$

Exemplo 10.12 De acordo com informações disponibilizadas pelo Tesouro Direto, em 15 de setembro de 2025 a taxa de venda e o PU de venda da NTN-B Principal com vencimento em 15 de agosto de 2026 foram iguais a, respectivamente, 9,51% e R\$ 4.173,55. De acordo com a ANBIMA, o VNA desse título era igual a 4.535,996085. Calcule a cotação. Em seguida, verifique se você obtém o mesmo PU.

- Em 2026, o dia 15 de agosto caiu em um sábado. Logo, a data de vencimento efetiva é 17/08/2026 (uma segunda-feira útil).

Rascunho $n = 231$

$$Q = \frac{1}{(1 + \gamma_a)^{n/252}} = \frac{1}{\left(1 + \frac{9,51}{100}\right)^{231/252}} \implies Q = 92,0097\%$$

$$P = N_0 Q \implies P = 4.535,996085 \times \frac{92,0097}{100} \implies P = 4.173,55$$

10.7 Teoria: Títulos Com Juros de Cupom

10.7.1 Títulos Não Indexados

Considere um título (não indexado) com valor de emissão C e taxa de juros i . Em cada uma das datas $1, 2, \dots, n-1$ e n o título paga os chamados juros de cupom no valor de iC . Na data n ocorre o pagamento do principal C . A figura que se segue ilustra a situação na qual o título é transacionado ao par no momento da emissão.

Figura 10.3

Como o fluxo de caixa em análise é um investimento simples, sabemos que existe uma única TIR. É possível mostrar que essa TIR é a própria taxa i . Estabeleceremos esse fato de duas maneiras, uma intuitiva e outra formal.

Abordagem intuitiva Considere os fluxos de caixa ilustrados na figura abaixo.

Figura 10.4

Observe que cada um deles tem valor atual igual a 0 quando descontado a taxa i .

Abordagem formal Para evitar qualquer confusão devido à notação, denote o argumento da função valor atual por z . Desta forma,

$$\begin{aligned} V(z) &= -C + \left[\sum_{k=1}^n \frac{iC}{(1+z)^k} \right] + \frac{C}{(1+z)^n} \\ \implies V(z) &= -C + \left[\sum_{k=1}^n \frac{1}{(1+z)^k} \right] iC + \frac{C}{(1+z)^n}. \end{aligned}$$

Adicionalmente,

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{(1+z)^k} = \frac{\frac{1}{(1+z)} - \frac{1}{(1+z)^{n+1}}}{1 - \frac{1}{1+z}} = \frac{1 - \frac{1}{(1+z)^n}}{z}.$$

Assim sendo,

$$\begin{aligned} V(z) &= -C + \frac{1 - \frac{1}{(1+z)^n}}{z} iC + \frac{C}{(1+z)^n} \\ \implies V(i) &= -C + C - \frac{C}{(1+i)^n} + \frac{C}{(1+i)^n} = 0. \end{aligned}$$

Mais uma vez, denote por P o preço ao qual o título é transacionado na data 0.

Figura 10.5

Seja R a TIR do fluxo de caixa em análise.

- Investimento simples: existe uma única TIR.

Desta forma,

$$\begin{aligned} -P + \left[\sum_{k=1}^n \frac{iC}{(1+R)^k} \right] + \frac{C}{(1+R)^n} &= 0 \\ \implies P &= \left\{ \left[\sum_{k=1}^n \frac{i}{(1+R)^k} \right] + \frac{1}{(1+R)^n} \right\} C. \end{aligned} \quad (10.12)$$

Consequentemente, em vez de se especificar o preço P , é possível especificar a TIR e utilizar a última igualdade para determinar P .

Por fim, as afirmativas abaixo são válidas para títulos negociados na data zero (ou em datas de pagamento de cupons, sendo que o cupom devido na data da transação é recebido pelo vendedor).

- $R = i \iff P = C$ (ao par)
 - A TIR será igual a i se e somente se o termo entre chaves na igualdade em (10.12) for igual a 1.
- $R > i \iff P < C$ (deságio)
- $R < i \iff P > C$ (ágio)

10.7.2 Títulos Indexados

Considere um título (indexado) com valor (monetário) de emissão C , maturidade n e taxa de juros (acima da variação do indexador) i' . O cupom J_k pago em uma data $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ é dado por

$$J_k = i'(1 + \theta_{0,k})C,$$

ao passo que o principal corrigido, a ser pago na data n , é igual a $(1 + \theta_{0,n})C$.

Lembre que

$$1 + \theta_{0,k} = \frac{I_k}{I_0}.$$

Desta forma,

$$J_k = i' \frac{I_k}{I_0} C \implies \frac{J_k}{I_k} = i' \frac{C}{I_0}$$

e

$$(1 + \theta_{0,n})C = \frac{I_n}{I_0} C \implies \frac{(1 + \theta_{0,n})C}{I_n} = \frac{C}{I_0}.$$

Seja P o preço do título na data zero. A figura que se segue ilustra o fluxo de caixa real.

- Observe que estamos utilizando o indexador como uma medida de inflação. Isso certamente é válido no caso da NTN-B.

Figura 10.6

Seja r a TIR desse fluxo de caixa real. Logo,

$$\begin{aligned}
 & -\frac{P}{I_0} + \left[\sum_{k=1}^n \frac{i'(C/I_0)}{(1+r)^k} \right] + \frac{C/I_0}{(1+r)^n} = 0 \\
 \Rightarrow & -P + \left[\sum_{k=1}^n \frac{i'C}{(1+r)^k} \right] + \frac{C}{(1+r)^n} = 0 \\
 \Rightarrow & P = \left\{ \left[\sum_{k=1}^n \frac{i'}{(1+r)^k} \right] + \frac{1}{(1+r)^n} \right\} C. \tag{10.13}
 \end{aligned}$$

Mais uma vez, em vez de se especificar P , é possível especificar a TIR real e utilizar a última igualdade para determinar P .

Por fim, as afirmativas abaixo são válidas para títulos negociados na data zero (ou em datas de pagamento de cupons, sendo que o cupom devido na data da transação é recebido pelo vendedor).

- $r = i' \iff P = C$ (ao par)
- $r > i' \iff P < C$ (deságio)
- $r < i' \iff P > C$ (ágio)

10.8 NTN-B Semestral

O VNA da NTN-B Semestral é idêntico ao da NTN-B Principal. Estudaremos agora como aquele título se adequa ao conteúdo da Subseção 10.7.2. A NTN-B Semestral paga cupons a cada seis meses. A taxa de cupom i' é igual a 6% a.a. Mais uma vez, o VNA em uma data t genérica é denotado por N_t . Ademais, $C = N_0$, sendo que a data 0 não necessariamente é igual ao dia 15 de julho de 2000. As variáveis P (PU), Q (cotação) e N_0 (valor nominal na data 0) satisfazem a igualdade (10.11). Para concluir, resta especificar como a cotação é calculada. Considere um título que irá pagar $m \geq 1$ cupons (incluindo aquele devido na data de vencimento). Denote por i_a a taxa anual estabelecida no momento da transação e por n_k , $k \in \{1, 2, \dots, m\}$, o número de dias úteis até o pagamento do k -ésimo cupom. Dito isto,

$$Q = \left\{ \sum_{k=1}^m \frac{(1 + 0,06)^{1/2} - 1}{[(1 + i_a)^{1/252}]^{n_k}} \right\} + \frac{1}{[(1 + i_a)^{1/252}]^{n_m}}. \tag{10.14}$$

- Compare o lado direito da igualdade acima com o termo entre chaves na expressão (10.13).

Exemplo 10.13 (Meramente ilustrativo. Em particular, ignoraremos as convenções para truncamento e número de decimais.) Fulano comprou uma NTN-B Semestral que ainda irá pagar dois cupons, o primeiro daqui a 10 e o segundo daqui a 137 dias úteis. O seu VNA (N_0) era igual a 3.243,27. O título foi transacionado à taxa de 3,21%. Calcule a cotação (Q) e o PU (P).

Rascunho

$$Q = \frac{(1 + 0,06)^{1/2} - 1}{\left(1 + \frac{3,21}{100}\right)^{10/252}} + \frac{(1 + 0,06)^{1/2} - 1}{\left(1 + \frac{3,21}{100}\right)^{137/252}} + \frac{1}{\left(1 + \frac{3,21}{100}\right)^{137/252}} \implies Q = 104,1555\%$$

$$P = N_0 Q \implies P = 3.243,27 \times \frac{104,1555}{100} \implies P = 3.378,04$$

Exemplo 10.14 De acordo com informações disponibilizadas pela ANBIMA, em 19 de setembro de 2025 o VNA, a taxa indicativa e o PU indicativo da NTN-B Semestral com vencimento em 15 de maio de 2027 eram iguais a, respectivamente, 4.541,014409, 8,57% e 4.469,134691. Calcule a cotação. Em seguida, verifique se você obtém o mesmo PU.

- Regras de truncamento: idênticas às da LFT.

É recomendável utilizar uma planilha eletrônica ou outro recurso computacional mais poderoso. Apresentam-se abaixo os cinco passos da resposta.

1. O vencimento efetivo do título ocorre em 17/05/2027, pois 15/05/2027 é um sábado.
2. Para identificar a data dos cupons, retroceda, a partir da data de vencimento, de seis em seis meses. Vale ressaltar que os cupons são pagos no dia 15, com possíveis ajustes para fins de semana e feriados. Tal procedimento estabelece que haverá pagamento de cupons nas seguintes quatro datas: 17/11/2025, 17/05/2026, 16/11/2026 e 17/05/2027.
3. Os respectivos números de dias úteis entre 19/09/2025 e cada um das quatro datas acima são: 41, 162, 289 e 412.
4. Cálculo da cotação.

$$Q = \frac{1,06^{1/2} - 1}{1,0857^{41/252}} + \frac{1,06^{1/2} - 1}{1,0857^{162/252}} + \frac{1,06^{1/2} - 1}{1,0857^{289/252}} + \frac{1,06^{1/2} - 1}{1,0857^{412/252}} + \frac{1}{1,0857^{412/252}}$$

$$\implies Q = 98,4171\%$$

5. Cálculo do PU.

$$P = 4.541,014409 \times \frac{98,4171}{100} \implies P = 4.469,134691$$

Figura 10.1

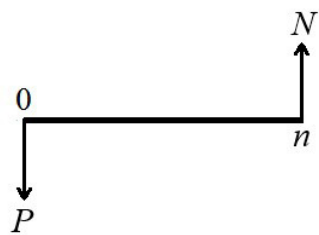


Figura 10.2

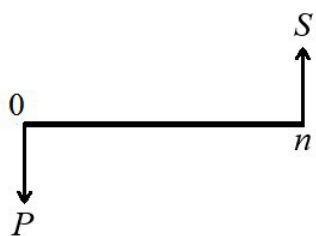


Figura 10.3

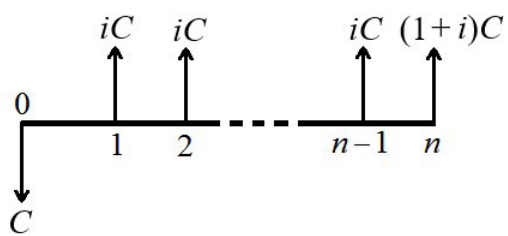


Figura 10.4

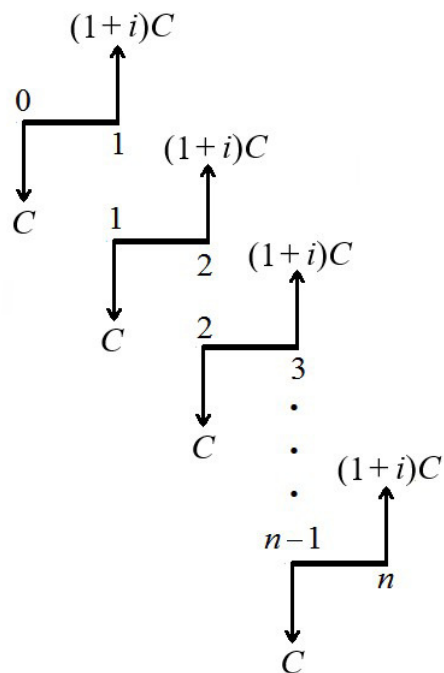


Figura 10.5

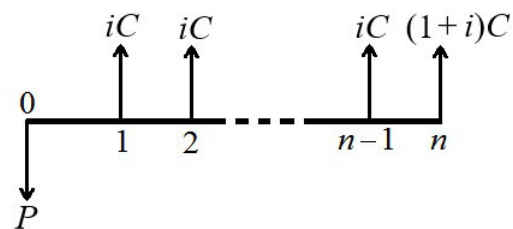


Figura 10.6

