

MATEMÁTICA FINANCEIRA:

NOTAS DE AULA

Alexandre B. Cunha

9 Indexação

9.1 Introdução

Um título é *indexado* quando os pagamentos a serem recebidos pelo seu detentor são determinados, integral ou parcialmente, pela trajetória de um indicador (por exemplo, um índice de preços ou uma moeda estrangeira) externo ao próprio título.

- Exemplos (indexador após a vírgula):
 - CDB DI, taxa DI over;
 - LFT, taxa Selic over;
 - NTN-B, IPCA;
 - NTN-D, dólar;
 - TIPS (*Treasury Inflation-Protected Securities*), CPI-U (*Consumer Price Index for All Urban Consumers*);
 - *Secured Overnight Financing Rate* (SOFR) *Floating Rate Note* (FRN), SOFR.
 - * SOFR: taxa de juros de financiamentos de curto prazo garantidos por títulos do Tesouro dos EUA.
- Operações com LFT e NTN-B serão discutidas no próximo tópico.

9.2 Fundamentação Teórica

Suponha que um agente econômico invista, na data zero, o capital C_0 em um título indexado.

Figura 9.1

Seja I_t o valor do indexador na data t e i' a taxa de juros (distinta do indexador) contratada. O capital C_n é dado por

$$C_n = C_0 \frac{I_n}{I_0} (1 + i')^n.$$

Essa igualdade pode ser expressa como

$$\frac{C_n}{I_n} = \frac{C_0}{I_0} (1 + i')^n.$$

Observe que se for possível interpretar o indexador como uma medida do nível de preços, então i' será uma taxa de juros real. Denote por θ_t a variação relativa do indexador na data t e por $\theta_{s,t}$ a variação relativa entre as datas s e t . Logo,

$$C_n = C_0 (1 + \theta_{0,n}) (1 + i')^n. \quad (9.1)$$

É possível decompor os juros totais J (ou seja, a diferença $C_n - C_0$) em duas parcelas. Mais especificamente, mostra-se no Apêndice que

$$J = C_0 (1 + \theta_{0,n}) [(1 + i')^n - 1] + \theta_{0,n} C_0. \quad (9.2)$$

A parcela $\theta_{0,n} C_0$ corresponde à correção/indexação do capital inicial, ao passo que a outra parcela pode ser interpretada como uma renda real (relativa à variação do indexador).

Exemplo 9.1 Fulano investiu R\$ 42.507,89 em um título indexado que rende 0,2% a.m. em termos reais (ou seja, acima do indexador). O prazo da aplicação foi de dois meses. Sabe-se que $\theta_1 = 0,8\%$ e $\theta_2 = 0,7\%$. Calcule o montante resgatado.

Figura 9.2

Inicialmente, observe que $1 + \theta_{0,2} = (1 + \theta_1)(1 + \theta_2)$. Assim sendo,

$$S = C(1 + \theta_1)(1 + \theta_2)(1 + i')^2 \implies S = 42.507,89 \times 1,008 \times 1,007 \times 1,002^2.$$

Logo, o montante resgatado é igual a R\$ 43.320,65.

9.3 CDB DI

O CDB DI é um título com rendimento atrelado à taxa DI over. Usualmente, a sua rentabilidade é expressa como um múltiplo da taxa de referência (por exemplo, “101% do CDI”).

A nossa próxima tarefa consiste em verificar como o CDB DI se adequa à estrutura teórica apresentada na Subseção 9.2. Sejam d_t a taxa DI over no dia t , α a percentagem da taxa DI contratada e C_t o capital no dia t . Dito isto, o capital evolui de acordo com a igualdade

$$C_t = (1 + \alpha d_t) C_{t-1}. \quad (9.3)$$

- Comentários:

- Convenção para a datação (d_t vs. d_{t-1}): questão discutida no começo do curso.
- O capital somente varia em dias úteis.
- A equação (9.3) captura perfeitamente a regra de que o capital é remunerado pela taxa αd_t .

Mostra-se no Apêndice que a expressão (9.3) implica que

$$C_n = C_0 \prod_{t=1}^n (1 + \alpha d_t). \quad (9.4)$$

Agora, defina o indexador $I_n(\alpha)$ de forma que

$$I_n(\alpha) = \prod_{t=1}^n (1 + \alpha d_t).$$

Observe que $I_0(\alpha) = 1$. Dito isto, basta combinar esse indexador com a hipótese de que $i' = 0$ para acomodar o CDB DI na estrutura teórica apresentada na subseção anterior.

É importante ressaltar que se $n > 1$ e $\alpha \neq 1$, então **não é correto** afirmar que a rentabilidade do título é dada por α vezes a taxa acumulada no período. A título de ilustração, faça $n = 2$. Observe que

$$\begin{aligned} (1 + \alpha d_1)(1 + \alpha d_2) &= 1 + \alpha d_1 + \alpha d_2 + \alpha^2 d_1 d_2 \\ \implies (1 + \alpha d_1)(1 + \alpha d_2) &= 1 + \alpha(d_1 + d_2) + \alpha^2 d_1 d_2. \end{aligned}$$

Por sua vez, seja z a taxa tal que

$$z = \alpha[(1 + d_1)(1 + d_2) - 1].$$

Ou seja, z é igual a α vezes a taxa acumulada no período. Logo,

$$\begin{aligned} z &= \alpha(d_1 + d_2 + d_1 d_2) = \alpha(d_1 + d_2) + \alpha d_1 d_2 \\ \implies 1 + z &= 1 + \alpha(d_1 + d_2) + \alpha d_1 d_2. \end{aligned}$$

Assim sendo, $1 + z$ será igual a $(1 + \alpha d_1)(1 + \alpha d_2)$ se e somente se α for igual a 1 ou 0 (ou $d_1 d_2 = 0$).

- Tendo em vista o resultado apresentado acima, usualmente o cálculo de $I_n(\alpha)$ é algo trabalhoso. Conforme será discutido mais à frente, a calculadora disponibilizada pela B3 no site <https://calculadorarendafixa.com.br> é uma ferramenta muito útil.

Exemplo 9.2 Fulano investiu R\$ 1.391,47 em um CDB DI pelo prazo de 21 dias úteis. Em 10 desses dias a taxa DI diária foi igual a 0,055132%. Nos demais dias a dita taxa foi igual a 0,055147%. O título rende 97% da taxa DI. Calcule o valor resgatado bruto S_b .

Rascunho

$$S_b = 1.391,47 \left(1 + 0,97 \frac{0,055132}{100}\right)^{10} \left(1 + 0,97 \frac{0,055147}{100}\right)^{11} \Rightarrow S_b = 1.407,18$$

Exemplo 9.3 No dia 25 de maio de 2024, Fulano aplicou R\$ 15.000,00 em um CDB remunerado a 100% da taxa DI. O resgate ocorreu no dia 25 de março de 2025. Calcule S_b , T e S .

De acordo com a calculadora da B3, o fator acumulado no período é 1,11163269. Logo,

$$S_b = 15.000 \times 1,11163269 \Rightarrow S_b = 16.674,49.$$

Como o prazo do investimento foi de 304 dias corridos, sabemos $\tau = 17,5\%$. Desta forma,

$$T = 0,175 \times (16.674,49 - 15.000) \Rightarrow T = 293,04.$$

Por fim,

$$S = S_b - T = 16.674,49 - 293,04 \Rightarrow S = 16.381,45.$$

Exemplo 9.4 No dia 22 de março de 2023, Fulano aplicou R\$ 542.645,25 em um CDB remunerado a 102% da taxa DI. O resgate ocorreu no dia 31 de agosto de 2026. Calcule S_b , T e S .

Mais uma vez, utilizaremos a calculadora da B3. O fator acumulado para o período em análise é 1,53539087. Logo,

$$S_b = 542.645,25 \times 1,53539087 \Rightarrow S_b = 833.172,56.$$

Tenho em vista que o prazo foi igual a 1.258 dias corridos, $\tau = 15\%$. Consequentemente,

$$T = 0,15 \times (833.172,56 - 542.645,25) \Rightarrow T = 43.579,10.$$

Finalmente,

$$S = S_b - T = 833.172,56 - 43.579,10 \Rightarrow S = 789.593,46.$$

Apêndice

Dedução da Expressão (9.2)

Como $J = C_n - C_0$, a expressão (9.1) implica que

$$\begin{aligned} J = C_0(1 + \theta_{0,n})(1 + i')^n - C_0 &\implies J = C_0 \{(1 + \theta_{0,n})(1 + i')^n - 1\} \\ &\implies J = C_0 \{(1 + \theta_{0,n})[(1 + i')^n - 1 + 1] - 1\} \\ &\implies J = C_0 \{(1 + \theta_{0,n})[(1 + i')^n - 1] + (1 + \theta_{0,n}) - 1\} \\ &\implies J = C_0 \{(1 + \theta_{0,n})[(1 + i')^n - 1] + \theta_{0,n}\}. \end{aligned}$$

A última igualdade é equivalente à expressão (9.2).

Dedução da Expressão (9.4)

A prova será feita por indução. Faça $t = 1$ na expressão (9.3) para concluir que

$$C_1 = (1 + \alpha d_1)C_0.$$

Logo, a igualdade (9.4) é válida para $n = 1$. Agora, suponha que (9.4) seja válida para $n = k$. Como (9.3) é válida para $t = k + 1$,

$$\begin{aligned} C_{k+1} = (1 + \alpha d_{k+1})C_k &= (1 + \alpha d_{k+1}) \left[C_0 \prod_{t=1}^k (1 + \alpha d_t) \right] \\ &\implies C_{k+1} = C_0 \prod_{t=1}^{k+1} (1 + \alpha d_t). \end{aligned}$$

Figura 9.1

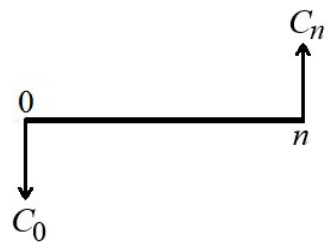


Figura 9.2

