

MATEMÁTICA FINANCEIRA:

NOTAS DE AULA

Alexandre B. Cunha

8 Inflação e Taxas de Juros Nominal e Real

8.1 Introdução

Suponha que um fazendeiro deseje comprar algumas cabeças de gado e dispõe de R\$ 1 milhão. Porém, ele opta por postergar a compra por um ano, preferindo aplicar o dinheiro e resgatando R\$ 1,2 milhão. Por sua vez, o preço da cabeça de gado passou de R\$ 10 mil para R\$ 12,5 mil.

Figura 8.1

Observe que $R = 20\%$. Logo, a taxa de juros nominal foi igual a 20% . Por sua vez, o preço da cabeça de gado cresceu 25% . Assim sendo, esse último valor corresponde à taxa de inflação relevante.

- De Faro (2006) e Samanez (2010): R é a taxa de juros *aparente*.

Qual foi a taxa de juros real? Atenção: **não é correto** afirmar que ela foi igual a -5% . A taxa de juros real r é a TIR do fluxo de caixa ilustrado abaixo.

Figura 8.2

- Interpretação das frações.

Como $1.000.000 \div 10.000 = 100$ e $1.200.000 \div 12.500 = 96$, a TIR real precisa satisfazer a igualdade

$$96 = 100(1 + r).$$

Assim sendo, $r = -4\%$.

Denote a taxa de inflação por π . Observe que $1 + R = 1,2$, $1 + r = 0,96$ e $1 + \pi = 1,25$. Como $1,2 = 0,96 \times 1,25$, podemos concluir que, **no presente contexto**,

$$1 + R = (1 + r)(1 + \pi). \quad (8.1)$$

Voltaremos a discutir essa igualdade, assim como outras relacionadas, na Subseção 8.5.

8.2 Revisão Rápida: Índice de Preços e Inflação

Notação: P_t índice de preços na data t , π_t taxa de inflação na data t .

$$\pi_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}$$

$$1 + \pi_t = \frac{P_t}{P_{t-1}}$$

Sejam t e s duas datas tais que $s < t$. Denote a inflação da data s até a data t por $\pi_{s,t}$. Logo,

$$1 + \pi_{s,t} = \frac{P_t}{P_s}. \quad (8.2)$$

Contudo,

$$\frac{P_t}{P_s} = \frac{P_t}{P_{t-1}} \times \frac{P_{t-1}}{P_{t-2}} \times \cdots \times \frac{P_{s+2}}{P_{s+1}} \times \frac{P_{s+1}}{P_s} = \prod_{k=s+1}^t (1 + \pi_k).$$

Assim sendo,

$$\frac{P_t}{P_s} = 1 + \pi_{s,t} = \prod_{k=s+1}^t (1 + \pi_k).$$

Dada uma sucessão de n taxas de inflação $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n-1}, \pi_n$, a *taxa de inflação média* $\bar{\pi}$ é tal que

$$(1 + \bar{\pi})^n = \prod_{k=1}^n (1 + \pi_k). \quad (8.3)$$

Observe que $\bar{\pi}$ é justamente a taxa constante de inflação que leva à mesma taxa acumulada de inflação entre as datas 0 e n . Vale ressaltar que

$$\bar{\pi} = \left[\prod_{k=1}^n (1 + \pi_k) \right]^{1/n} - 1.$$

Sejam C_t e C_s valores monetários nas datas correspondentes. Eles terão o mesmo poder de compra nos respectivos períodos se

$$\frac{C_t}{P_t} = \frac{C_s}{P_s}.$$

Contudo, a última igualdade é equivalente

$$\frac{C_t}{C_s} = \frac{P_t}{P_s}.$$

Combine a última igualdade com a expressão (8.2) para concluir que

$$\frac{C_t}{P_t} = \frac{C_s}{P_s} \iff \frac{C_t}{C_s} = 1 + \pi_{s,t} .$$

Assim sendo, C_t e C_s terão o mesmo poder de compra se e somente se o capital crescer à mesma taxa que o índice de preços durante o período em análise.

- Sejam $X > 0$ e $Z > 0$ duas variáveis genéricas. A razão X_t/Z_t crescerá/decrescerá/permanecerá constante se e somente se a taxa de crescimento de X for maior que/menor que/igual à taxa de crescimento de Z .

8.3 Fluxos de Caixa a Preços Constantes

Seja $a = (a_0, a_1, \dots, a_n)$ um fluxo de caixa a preços correntes. O correspondente fluxo de caixa a preços da data t é dado por

$$\left(\frac{a_0}{P_0} P_t, \frac{a_1}{P_1} P_t, \dots, \frac{a_n}{P_n} P_t \right) .$$

Exemplo 8.1 Considere o fluxo de caixa $a = (-100, 10, 110)$. O comportamento do índice de preços é tal que $(P_0, P_1, P_2) = (200, 202, 210)$. O fluxo de caixa b a preços da data 0 é dado por

$$\begin{aligned} b &= \left(\frac{a_0}{P_0} P_0, \frac{a_1}{P_1} P_0, \frac{a_2}{P_2} P_0 \right) = \left(\frac{-100}{200} \times 200, \frac{10}{202} \times 200, \frac{110}{210} \times 200 \right) \\ &\implies b = \left(-100, \frac{10}{1,01}, \frac{110}{1,05} \right) . \end{aligned}$$

Exemplo 8.2 Considere o exemplo anterior. Suponha que não foram informados os valores de P_0 , P_1 e P_2 . Contudo, estão disponíveis os valores de π_1 e π_2 . Monte o fluxo de caixa b a preços da data zero, o fluxo de caixa b' a preços da data 1 e o fluxo de caixa b'' a preços da data 2.

Inicialmente, observe que

$$\begin{aligned} \frac{P_1}{P_0} = 1 + \pi_1 &\implies \frac{P_0}{P_1} = \frac{1}{1 + \pi_1}, \\ \frac{P_2}{P_1} = 1 + \pi_2 &\implies \frac{P_1}{P_2} = \frac{1}{1 + \pi_2} \end{aligned}$$

e

$$\frac{P_2}{P_0} = \frac{P_2}{P_1} \frac{P_1}{P_0} = (1 + \pi_2)(1 + \pi_1) \implies \frac{P_0}{P_2} = \frac{1}{(1 + \pi_1)(1 + \pi_2)}.$$

Assim sendo,

$$b = \left(a_0, a_1 \frac{P_0}{P_1}, a_2 \frac{P_0}{P_2} \right) \implies b = \left(a_0, \frac{a_1}{1 + \pi_1}, \frac{a_2}{(1 + \pi_1)(1 + \pi_2)} \right),$$

$$b' = \left(a_0 \frac{P_1}{P_0}, a_1, a_2 \frac{P_1}{P_2} \right) \implies b' = \left(a_0(1 + \pi_1), a_1, \frac{a_2}{1 + \pi_2} \right)$$

e

$$b'' = \left(a_0 \frac{P_2}{P_0}, a_1 \frac{P_2}{P_1}, a_2 \right) \implies b'' = (a_0(1 + \pi_1)(1 + \pi_2), a_1(1 + \pi_2), a_2).$$

8.4 TIRs de Fluxos de Caixa a Preços Constantes

Considere agora a seguinte pergunta: será que a análise do problema da TIR de um fluxo de caixa a preços constantes é afetada pela data tomada como referência para os preços? Por exemplo, no contexto do Exemplo 8.2, se r é uma TIR para b , então r também é uma TIR para b' e b'' ?

Seja a um fluxo de caixa a preços correntes. Denote por $v_t(i)$ a função valor atual do fluxo de caixa a a preços da data t e por $v(i)$ a função valor atual do fluxo de caixa

$$\left(\frac{a_0}{P_0}, \frac{a_1}{P_1}, \dots, \frac{a_n}{P_n} \right). \quad (8.4)$$

Mostraremos que a igualdade

$$v_t(i) = P_t v(i) \quad (8.5)$$

é válida. Primeiramente, observe que

$$v(i) = \sum_{k=0}^n \frac{a_k/P_k}{(1+i)^k} \quad (8.6)$$

e

$$v_t(i) = \sum_{k=0}^n \frac{(a_k/P_k)P_t}{(1+i)^k} \implies v_t(i) = P_t \sum_{k=0}^n \frac{a_k/P_k}{(1+i)^k}.$$

Combine a última igualdade com a expressão (8.6). Esse procedimento estabelece que a igualdade (8.5) se verifica.

Lembre que $P_t > 0$. Dito isto, agora utilize a expressão (8.5) para concluir que

$$v_t(i) = 0 \iff v(i) = 0.$$

Logo, uma taxa de juros será uma TIR do fluxo de caixa a preços da data t se e somente se ela também for uma TIR do fluxo de caixa em (8.4). Ademais,

$$v_t(i) > 0 \iff v(i) > 0$$

e

$$v_t(i) < 0 \iff v(i) < 0.$$

Desta forma, é suficiente considerar a função $v(i)$ ao se estudar o problema da TIR de um fluxo de caixa a preços constantes.

- Evidentemente, também é suficiente trabalhar com a função $v_t(i)$.

Concluindo, podemos afirmar, sem qualquer ambiguidade, que r é uma *taxa interna de retorno real* para o fluxo de caixa nominal $a = (a_0, a_1, \dots, a_n)$ se $v(r) = 0$.

8.5 A Relação entre TIR Nominal, TIR Real e Taxa de Inflação

8.5.1 O Caso Mais Simples: um Desembolso e um Recebimento

Considere os fluxos de caixa nominal e real ilustrados abaixo.

Figura 8.3

Observe que

$$C_n = C_0(1 + R)^n$$

e

$$\frac{C_n}{P_n} = \frac{C_0}{P_0}(1 + r)^n.$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} C_n = C_0 \frac{P_n}{P_0} (1 + r)^n &\implies \frac{C_n}{C_0} = \frac{P_n}{P_0} (1 + r)^n \implies (1 + R)^n = \frac{P_n}{P_0} (1 + r)^n \\ &\implies 1 + R = (1 + r) \left(\frac{P_n}{P_0} \right)^{1/n}. \end{aligned} \quad (8.7)$$

Ademais,

$$\prod_{k=1}^n (1 + \pi_k) = \frac{P_n}{P_0}.$$

Logo, é possível combinar a expressão (8.3) com a igualdade em (8.7) para concluir que

$$1 + R = (1 + r)(1 + \bar{\pi}).$$

Observe que a expressão (8.1) é um caso particular (ou seja, o caso em que $n = 1$) da última igualdade.

8.5.2 Taxa de Inflação Constante no Tempo

Seja $a = (a_0, a_1, \dots, a_n)$ um fluxo de caixa em valores correntes. Se r é uma TIR real, então

$$\sum_{k=0}^n \frac{a_k/P_k}{(1+r)^k} = 0 \implies \sum_{k=0}^n \frac{a_k(P_0/P_k)}{(1+r)^k} = 0.$$

Suponha que a taxa de inflação seja constante e igual a π durante o período em análise. Logo,

$$\frac{P_0}{P_k} = \left(\frac{1}{1+\pi} \right)^k.$$

Combine as duas últimas igualdades para concluir que

$$\sum_{k=0}^n \frac{a_k}{[(1+r)(1+\pi)]^k} = 0.$$

Contudo, esta última expressão implica que $(1+r)(1+\pi) - 1$ é uma TIR nominal de a . Logo, R , r e π satisfazem a expressão (8.1).

- Implicações para existência e unicidade/multiplicidade: o número de TIR nominais é igual ao número de TIR reais.

8.5.3 Taxa de Inflação Variável no Tempo

Suponha agora que a inflação varia ao longo do tempo. **Não** é possível substituir π por $\bar{\pi}$ na expressão (8.1). De fato, seja $a = (a_0, a_1, a_2)$ um fluxo de caixa em valores correntes, onde $a_1 \neq 0$. Suponha que R é uma TIR nominal de a . Assim sendo,

$$\begin{aligned} a_0 + \frac{a_1}{1+R} + \frac{a_2}{(1+R)^2} &= 0 \\ \implies a_0(1+R)^2 + a_1(1+R) + a_2 &= 0. \end{aligned} \tag{8.8}$$

Por sua vez, uma TIR real r deve satisfazer a expressão

$$a_0(1+\pi_1)(1+\pi_2) + \frac{a_1(1+\pi_2)}{1+r} + \frac{a_2}{(1+r)^2} = 0.$$

Tendo em vista que $(1+\pi_1)(1+\pi_2) = (1+\bar{\pi})^2$, tem-se

$$\begin{aligned} a_0(1+\bar{\pi})^2 + \frac{a_1(1+\pi_2)}{1+r} + \frac{a_2}{(1+r)^2} &= 0 \\ \implies a_0[(1+\bar{\pi})(1+r)]^2 + a_1(1+\pi_2)(1+r) + a_2 &= 0. \end{aligned}$$

Matemática Financeira

Agora, assumamos que $1 + R$ é igual ao produto $(1 + r)(1 + \bar{\pi})$. Logo,

$$a_0(1 + R)^2 + a_1(1 + r)(1 + \pi_2) + a_2 = 0.$$

Combine esta última expressão com a igualdade em (8.8) para concluir que

$$a_1[(1 + R) - (1 + r)(1 + \pi_2)] = 0.$$

Como $a_1 \neq 0$, o termo entre colchetes precisa ser igual a zero. Porém, isso implica que π_2 é igual a $\bar{\pi}$, o que ultimamente leva à conclusão de que π_1 e π_2 são iguais. Tendo em vista que assumimos que $\pi_1 \neq \pi_2$, a hipótese introduzida no começo deste parágrafo é falsa.

Referências

- De Faro, Clovis (2006). *Fundamentos da Matemática Financeira: Uma Introdução ao Cálculo Financeiro e à Análise de Investimentos de Risco*. Saraiva.
- Samanez, Carlos Patricio (2010). *Matemática Financeira: Aplicações à Análise de Investimentos*. 5ª edição. Pearson Prentice Hall.

Figura 8.1

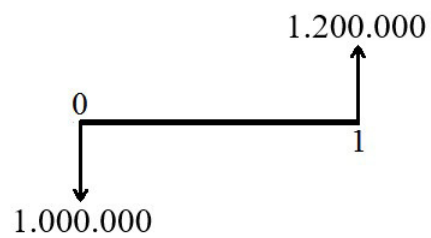


Figura 8.2

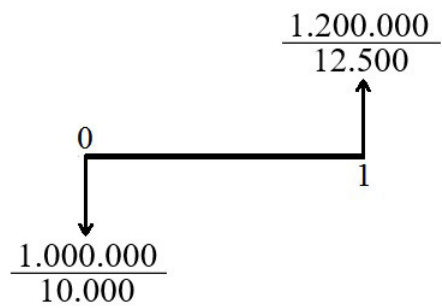


Figura 8.3

