

MATEMÁTICA FINANCEIRA:

NOTAS DE AULA

Alexandre B. Cunha

7 Desconto

7.1 Introdução

Inicialmente, vale destacar que a palavra *desconto* é frequentemente utilizada para se referir à diferença entre o valor nominal (i.e., valor a ser resgatado) de um título e o preço em que ele é transacionado. Contudo, a chamada *antecipação de recebíveis* frequentemente é realizada no Brasil de uma forma particular que ficou conhecida como *desconto*.

- Possível origem: desconto de duplicatas.
- Pelo menos até a metade da década de 1980, as transações com LTNs adotavam as convenções do chamado *Desconto Comercial Simples*.

Suponha que Fulano possui um título que pagará N reais na data n . Desejando antecipar o recebimento, ele procura uma instituição bancária, a qual realiza um desconto no valor de D reais. Seja P o valor recebido por Fulano. Logo, $P = N - D$.

Figura 7.1

Observe que N está definido. Se soubermos como calcular D , então o valor de P também será conhecido (e vice-versa). Precisamos então responder à seguinte pergunta: Como se calcula o valor de D (ou de P)? A resposta depende do tipo de desconto.

Com relação ao regime (aqui este termo tem significado idêntico ao significado nas expressões Regime de Juros Simples e Regime de Juros Composto), o desconto pode ser *simples* (*linear*) ou *composto* (*exponencial*). No tocante à variável (N ou P) que serve como base para o cálculo de D , o desconto pode ser *comercial* (*por fora*) ou *racional* (*por dentro*). Assim sendo, existem quatro tipos de desconto:

1. Desconto Comercial Simples;

2. Desconto Racional Simples;
3. Desconto Comercial Composto;
4. Desconto Racional Composto.

7.2 Desconto Comercial Simples

Seja d a taxa de desconto por período. Ela incide linearmente sobre o valor de resgate N . Logo,

$$D = ndN.$$

Assim sendo, $P = N - ndN$. Consequentemente,

$$P = (1 - nd)N.$$

Observe que as variáveis n e d devem satisfazer a desigualdade $nd \leq 1$.

Exemplo 7.1 Suponha que $d = 2\%$ a.m., $n = 3$ meses e $N = 1.000$. Logo, $D = 60$ e $P = 940$.

7.3 Desconto Racional Simples

Seja i a taxa de desconto por período. Ela incide linearmente sobre o valor descontado P . Logo,

$$D = niP.$$

Como $P = N - D$, tem-se que $P = N - niP$. Desta forma,

$$P = \frac{N}{1 + ni} \tag{7.1}$$

e

$$D = \frac{niN}{1 + ni}.$$

Lembre que no Regime de Juros Simples, a relação

$$C = \frac{S}{1 + ni}$$

é válida. Exceto pela notação, essa última expressão é idêntica à igualdade (7.1). Logo, o Desconto Racional Simples pode ser interpretado como um caso particular do Regime de Juros Simples.

É possível mostrar que para que os dois tipos de desconto simples levem ao mesmo resultado, d , i e n devem ser tais que

$$d = \frac{i}{1 + ni}.$$

Observe que essa relação depende do prazo n .

7.4 Desconto Comercial Composto

Seja $d \in (0, 1)$ a taxa de desconto por período. Para obter P , utiliza-se o fator $(1 - d)$ para descontar, exponencialmente, o valor de resgate N . Ou seja,

$$P = (1 - d)^n N.$$

Para capturar a intuição subjacente à expressão acima, considere a recursão abaixo. Observe que adicionou-se um subscrito, referente ao tempo, à variável P .

$$\begin{aligned} P_1 &= (1 - d)N \\ P_2 &= (1 - d)P_1 \implies P_2 = (1 - d)^2 N \\ P_3 &= (1 - d)P_2 \implies P_3 = (1 - d)^3 N \\ &\vdots \end{aligned}$$

Tendo em vista que $P = N - D$, sabemos que $D = N - P$. Logo,

$$D = N - (1 - d)^n N \implies D = [1 - (1 - d)^n]N.$$

7.5 Desconto Racional Composto

Seja $i > -1$ a taxa de desconto por período. Para obter P , utiliza-se o fator $(1 + i)^{-1}$ para corrigir, exponencialmente, o valor de resgate N . Ou seja,

$$P = \frac{N}{(1 + i)^n}. \quad (7.2)$$

Como $P + D = N$, podemos concluir que

$$\frac{N}{(1 + i)^n} + D = N \implies D = [1 - (1 + i)^{-n}]N.$$

Lembre que

$$C = \frac{S}{(1 + i)^n}$$

no Regime de Juros Compostos. A comparação dessa última igualdade com a relação (7.2) estabelece que o Desconto Racional Composto é um caso particular do Regime de Juros Compostos.

Por fim, é uma tarefa relativamente simples mostrar que para os dois tipos de desconto composto levarem ao mesmo resultado, d e i devem satisfazer a igualdade

$$d = \frac{i}{1 + i}.$$

Observe que essa relação não depende do prazo n .

7.6 Exemplos

Tendo em vista que o Desconto Comercial Simples é a modalidade de desconto amplamente predominante no Brasil, os exemplos que se seguem abordarão tão somente a referida modalidade.

Exemplo 7.2 Fulano descontou, 60 dias antes do vencimento, uma duplicata de R\$ 42.642,39. A taxa de desconto foi igual a 3% a.m. Calcule D , P e a taxa interna de retorno (mensal) da operação.

Figura 7.2

Rascunho

$$\begin{aligned} D = ndN &\implies D = 2 \times 0,03 \times 42.642,39 \implies D = 2.558,54 \\ P = N - D &\implies P = 42.642,39 - 2.558,54 \implies P = 40.083,85 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N = P(1 + R)^2 &\implies R = (N/P)^{1/2} - 1 \\ &\implies R = (42.642,39/40.083,85)^{1/2} - 1 \implies R = 3,1421\% \end{aligned}$$

Exemplo 7.3 Fulano descontou, 3 meses antes do vencimento, um título com valor nominal de R\$ 20.000,00. Nesses 3 meses há 92 dias corridos. A taxa de desconto foi de 1% a.m. O banco cobrou uma taxa de serviço igual a 2% do valor do título. Adicionalmente, houve incidência de IOF nos seguintes termos: 0,38% sobre o valor do título e uma alíquota diária de 0,0041%. A taxa de serviço e o imposto são cobrados no momento da liberação dos recursos. Calcule D , o valor recebido bruto P_b , a taxa de serviço X , o valor dos impostos T , o valor recebido líquido P e as taxas internas de retorno mensais R (sob o ponto de vista de Fulano) e R' (sob o ponto de vista do banco) da operação.

- Não necessariamente as regras de tributação presentemente em vigor são iguais às mencionadas acima.

Figura 7.3

Rascunho

$$\begin{aligned} D = ndN &\implies D = 3 \times 0,01 \times 20.000 \implies D = 600 \\ P_b = N - D &\implies P_b = 20.000 - 600 \implies P_b = 19.400 \end{aligned}$$

Matemática Financeira

$$X = 0,02N = 0,02 \times 20.000 \implies X = 400$$

$$T = T_0 + T_d$$

$$T_0 = 0,0038N \implies T_0 = 0,0038 \times 20.000 \implies T_0 = 76$$

$$T_d = 92 \times 0,000041N \implies T_d = 92 \times 0,000041 \times 20.000 \implies T_d = 75,44$$

$$T = 76 + 75,44 \implies T = 151,44$$

$$P = P_b - X - T \implies P = 19.400 - 400 - 151,44 \implies P = 18.848,56$$

$$N = P(1 + R)^3 \implies 20.000 = 18.848,56(1 + R)^3 \implies R = 1,9962\%$$

Figura 7.1

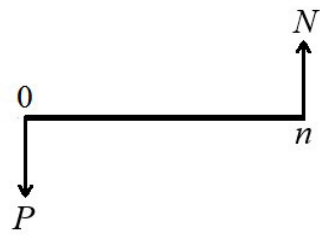


Figura 7.2

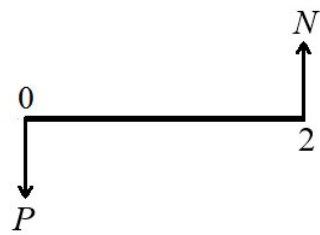


Figura 7.3

