

MATEMÁTICA FINANCEIRA:

NOTAS DE AULA

Alexandre B. Cunha

6 A Taxa Interna de Retorno

6.1 Introdução

Discutiremos neste tópico o importante conceito de *taxa interna de retorno*. Inicialmente, analisaremos três exemplos simples.

Exemplo 6.1 Fulano deseja comprar uma geladeira nova. Há duas opções de pagamento: R\$ 5.000,00 à vista ou dois pagamentos mensais sucessivos de R\$ 2.600,00, sendo o primeiro deles daqui a um mês. Obtenha a taxa de juros do crediário.

Figura 6.1

Denote por i a taxa de juros do crediário. Ela deve satisfazer a igualdade

$$5.000 = \frac{2.600}{1+i} + \frac{2.600}{(1+i)^2}. \quad (6.1)$$

- Interprete a igualdade acima.

Defina a variável auxiliar x de forma que

$$x = \frac{1}{1+i}. \quad (6.2)$$

Para referência futura, observe que

$$i > -1 \iff 1+i > 0 \iff \frac{1}{1+i} > 0 \iff x > 0.$$

Logo, estamos em busca de soluções positivas da equação $5.000 = 2.600x + 2.600x^2$, a qual é equivalente a

$$13x^2 + 13x - 25 = 0.$$

Rascunho

$$x = \frac{-13 \pm \sqrt{13^2 - 4 \times 13 \times (-25)}}{2 \times 13} = \frac{-13 \pm \sqrt{169 + 1300}}{2 \times 13} = \frac{-13 \pm \sqrt{1469}}{2 \times 13}$$

Raízes: $x_1 = 0,974136$ e $x_2 < 0$.

Dessa forma,

$$\frac{1}{1+i} = 0,974136 \implies i = 2,6551\% \text{ a.m.}$$

Exemplo 6.2 Fulano contraiu hoje um empréstimo de R\$ 4.500,00. A dívida será quitada através de quatro pagamentos mensais sucessivos de R\$ 1.050,00, sendo o primeiro deles daqui a um mês. Obtenha a taxa de juros do financiamento.

Figura 6.2

Seja i a taxa de juros do financiamento. Dessa forma,

$$4.000 = \sum_{k=1}^4 \frac{1.050}{(1+i)^k}. \quad (6.3)$$

Seja x a variável auxiliar definida em (6.2). Logo, procuramos soluções positivas da equação

$$4.000 = \sum_{k=1}^4 1.050x^k.$$

A última igualdade é equivalente a

$$x^4 + x^3 + x^2 + x - \frac{80}{21} = 0, \quad (6.4)$$

a qual somente pode ser resolvida numericamente. O mesmo vale para a equação (6.3)

Lembre que o nosso problema consiste em (a) identificar uma taxa de juros i que satisfaça a equação (6.3) ou (b) identificar um valor de x que satisfaça a equação (6.4). Considere a abordagem (a). É possível utilizar a função TIR do Excel ou uma calculadora financeira para concluir que $i = 1,9806\%$. A abordagem (b) será discutida com mais detalhes ao longo deste documento.

- Usualmente, problemas do tipo que discutimos acima (i.e., computo da taxa de juros) não possuem solução analítica para $n > 2$.

Exemplo 6.3 Em dado momento, Fulano comprou um lote de ações por R\$ 432.074,35. Cinco meses depois ele recebeu um pagamento de dividendos no valor de R\$ 11.242,89. Após mais seis meses, recebeu R\$ 7.890,68 também a título de dividendos. Por fim, três meses depois desse último pagamento ele vendeu o lote de ações por R\$ 441.983,67. Obtenha a taxa de juros (em termos mensais) pela qual Fulano foi remunerado.

Figura 6.3

Seja i a taxa solicitada. Logo,

$$432.074,35 = \frac{11.242,89}{(1+i)^5} + \frac{7.890,68}{(1+i)^{11}} + \frac{441.983,67}{(1+i)^{14}}. \quad (6.5)$$

Utilizando uma ferramenta como a HP 12C ou como o Excel, é possível concluir que $i = 0,4751\%$.

A taxa de juros computada em cada um dos três exemplos acima corresponde justamente à taxa interna de retorno (TIR) da respectiva operação. Assim sendo, vale mencionar o seguinte ponto: em diversas ocasiões, haverá necessidade de computar e interpretar uma TIR. O restante deste tópico tem como objetivo fornecer ao aluno o ferramental teórico necessário para lidar com esse tipo de problema.

6.2 A Função Valor Atual e a Definição do Conceito de Taxa Interna de Retorno

Dado um fluxo de caixa $a = (a_0, a_1, \dots, a_n)$, onde $a_0 \neq 0$ e $a_n \neq 0$, a *função valor atual* associada ao dito fluxo de caixa é dada por

$$V(i) = \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{(1+i)^k}. \quad (6.6)$$

- Sim, já utilizamos essa função antes. Aqui explicitamos que i é um argumento da função e removemos o subscrito referente à data focal.
 - Lembre que a data focal é irrelevante no Regime de Juros Compostos.

Para referência futura, observe que

$$V(0) = \sum_{k=0}^n a_k, \quad (6.7)$$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} V(i) = a_0, \quad (6.8)$$

$$\lim_{i \rightarrow -1^+} V(i) = \begin{cases} +\infty, & \text{se } a_n > 0 \\ -\infty, & \text{se } a_n < 0 \end{cases}, \quad (6.9)$$

$$V'(i) = - \sum_{k=1}^n \frac{ka_k}{(1+i)^{k+1}} \quad (6.10)$$

e

$$V''(i) = \sum_{k=1}^n \frac{k(k+1)a_k}{(1+i)^{k+1}}. \quad (6.11)$$

Dado um fluxo de caixa $a = (a_0, a_1, \dots, a_n)$, onde $a_0 \neq 0$ e $a_n \neq 0$, uma *taxa interna de retorno* para o dito fluxo de caixa é uma taxa de juros R tal que

$$V(R) = 0. \quad (6.12)$$

Em outras palavras, uma TIR é uma taxa de juros que zera o valor presente descontado do fluxo de caixa.

- Comentários:

- Sim, zerar; ver equações (6.1), (6.3) e (6.5).
- Uma TIR (ao invés de a TIR)
- Como $a_0 \neq 0$ e $a_n \neq 0$, R não pode ser igual a -1 .
- Zerar o valor atual na data 0 é equivalente a zerar em uma data t qualquer. De fato, como $R > -1$,

$$V(R) = 0 \iff (1+R)^t V(R) = 0.$$

Consequentemente, no que diz respeito à TIR, a data focal é irrelevante.

- Interpretação do termo $\sum_{k=0}^n a_k$: somatório dos recebimentos e desembolsos (com sinal negativo).

Observe que (6.12) pode ser expressa como

$$a_0 + \frac{a_1}{1+R} + \frac{a_2}{(1+R)^2} + \dots + \frac{a_n}{(1+R)^n} = 0. \quad (6.13)$$

Sendo x a variável auxiliar previamente definida, a equação logo acima é equivalente a

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = 0. \quad (6.14)$$

Observe que a equação (6.14) pode ter de 0 até n soluções reais. Ademais, se $n > 2$, então usualmente o cômputo de uma solução demandará o uso de métodos numéricos. Assim sendo, nós precisamos estudar os problemas da *existência*, da *unicidade* e do *cômputo* da TIR. Essas (e outras) questões serão discutidas a seguir.

6.3 A Regra de Sinais de Descartes

A Regra de Sinais de Descartes (*Descartes' Rule of Signs* em inglês) é bastante útil para identificar o número máximo e o número mínimo de raízes reais positivas da equação (6.14). Ela é discutida em vários livros-textos, como Lial, Hornsby, Schneider e Daniels (2017).

Antes de discutirmos a referida regra, é conveniente relembrar alguns pontos referentes aos polinômios. O primeiro deles é a *multiplicidade* de uma raiz.

Exemplo 6.4 Considere a equação

$$x^2 - 6x + 9 = 0. \quad (6.15)$$

As soluções são dadas por

$$x_1 = \frac{6 + \sqrt{\Delta}}{2} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{6 - \sqrt{\Delta}}{2}.$$

Porém, $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 9 = 0$. Dessa forma, $x_1 = x_2 = 3$. Logo, 3 é a única raiz. Como

$$3 = \frac{6 + \sqrt{\Delta}}{2} \quad \text{e} \quad 3 = \frac{6 - \sqrt{\Delta}}{2},$$

diz-se que essa raiz tem multiplicidade 2.

É possível generalizar o exemplo acima. Seja p a função polinomial dada por

$$p(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_2 x^2 + c_1 x + c_0,$$

onde $c_n \neq 0$. Estamos assumindo que os coeficientes são números reais, ao passo que x pode ser um número complexo. Observe que o polinômio p pode ser expresso como

$$p(x) = c_n \prod_{j=1}^n (x - r_j),$$

onde r_j é um zero (i.e., uma raiz) de p ; ou seja, $p(r_j) = 0$. Vale ressaltar que r_j pode ser um número complexo. A multiplicidade de uma raiz é igual ao número de termos r_j que são iguais à raiz em questão.

Exemplo 6.5 Considere a expressão $(x + 1)^2(x - 2)^3$. Como

$$(x + 1)^2(x - 2)^3 = x^5 - 4x^4 + x^3 + 10x^2 - 4x - 8, \quad (6.16)$$

sabemos que as raízes do polinômio do lado direito da igualdade são -1 (com multiplicidade 2) e 2 (com multiplicidade 3).

- Evidentemente, somente foi possível identificar as raízes (e suas multiplicidades) imediatamente devido ao fato de a igualdade (6.16) ser conhecida. A análise seria bem mais complexa (possivelmente requerendo métodos numéricos) se estivéssemos tão somente igualando o lado direito da expressão (6.16) a zero.

Fato Sejam p um polinômio e r uma raiz de p . As seguintes duas afirmativas são verdadeiras:

1. Se r tem multiplicidade k , então r é uma raiz de cada uma das $k - 1$ primeiras derivadas de p e não é uma raiz da derivada de ordem k de p .
2. Se r é uma raiz de cada uma das primeiras $k - 1$ derivadas de p e não é uma raiz da derivada de ordem k de p , então r tem multiplicidade k .

A título de ilustração, considere o polinômio do Exemplo 6.4. A primeira, segunda e terceira derivadas são dadas por, respectivamente,

$$5x^4 - 16x^3 + 3x^2 + 20x - 4,$$

$$20x^3 - 48x^2 + 6x + 20$$

e

$$60x^2 - 96x + 6.$$

Observe que -1 é uma raiz da primeira derivada, mas não é da segunda. Por sua vez, 2 é raiz das duas primeiras derivadas e não é da terceira. Podemos também revisar o Exemplo 6.4. Observe que

$$(x - 3)(x - 3) = x^2 - 6x + 9.$$

Logo, 3 de fato é a única raiz (com multiplicidade 2). Adicionalmente, a sua derivada é igual a $2x - 6$, a qual também assume o valor zero para $x = 3$. A segunda derivada é igual a 2 . Logo, 3 não é uma raiz da segunda derivada.

É possível agora retornar ao tema central desta subseção.

Regra de Sinais de Descartes Sejam $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função polinomial dada por

$$p(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_2 x^2 + c_1 x + c_0,$$

onde $c_n \neq 0$, s o número de variações de sinal nas coordenadas (não nulas) do vetor de coeficientes $(c_n, c_{n-1}, \dots, c_2, c_1, c_0)$ de p , s' o número de variações de sinais nas coordenadas (não nulas) do vetor de coeficientes $((-1)^n c_n, (-1)^{n-1} c_{n-1}, \dots, c_2, -c_1, c_0)$ de $p(-x)$, m o número de raízes reais positivas de p e m' o número de raízes reais negativas de p . Para fins do cômputo de m e m' , cada ocorrência de uma raiz com multiplicidade superior a 1 é tratada como se fosse uma raiz distinta. As seguintes duas afirmativas

são verdadeiras:

1. $m = s - 2k$, onde k é um inteiro não negativo;
2. $m' = s' - 2k'$, onde k' é um inteiro não negativo.

Exemplo 6.6 Considere o polinômio do Exemplo 6.4. Há duas mudanças de sinal e duas raízes reais positivas. Logo, $s = 2, m = 2$ e $k = 0$. Adicionalmente,

$$(-x)^2 - 6(-x) + 9 = x^2 + 6x + 9.$$

Não há mudanças de sinal e também não há raízes negativas. Assim sendo, $s' = 0, m' = 0$ e $k' = 0$.

Exemplo 6.7 Considere o polinômio do Exemplo 6.5. Há três mudanças de sinal e três raízes reais positivas. Logo, $s = 3, m = 3$ e $k = 0$. Adicionalmente,

$$(-x)^5 - 4(-x)^4 + (-x)^3 + 10(-x)^2 - 4(-x) - 8 = -x^5 - 4x^4 - x^3 + 10x^2 + 4x - 8.$$

Há duas mudanças de sinal e duas raízes reais negativas. Assim sendo, $s' = 2, m' = 2$ e $k' = 0$.

Exemplo 6.8 Considere o polinômio $x^2 - 6x + 10$. Como $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 10 = -4$, não há raízes reais. No tocante às mudanças de sinais, há duas. Logo, $s = 2, m = 0$ e $k = 1$. Adicionalmente,

$$(-x)^2 - 6(-x) + 10 = x^2 + 6x + 10.$$

Não há mudança de sinal. Assim sendo, $s' = 0, m' = 0$ e $k' = 0$.

Podemos agora aplicar a Regra de Sinais de Descartes ao estudo da TIR. Lembre que estamos interessados nas raízes reais positivas da equação polinomial (6.14). Dessa forma, podemos aplicar a Afirmativa 1 da referida regra para sabermos o número máximo de TIRs que um fluxo de caixa possui. Para tanto, basta contar o número de mudanças de sinais nas coordenadas não nulas do vetor $(a_0, a_1, \dots, a_n)$.

- Para contar o número de mudanças de sinais, é indiferente se utilizamos o vetor $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ ou o vetor $(a_n, a_{n-1}, \dots, a_0)$.
 - A indiferença não se verifica para um rearranjo genérico da ordem dos coeficientes.

Exemplo 6.9 Considere o fluxo de caixa $(-100, 5, 105)$. Há uma mudança de sinal. Logo, existe no máximo uma TIR.

Exemplo 6.10 Considere o fluxo de caixa $(-10, -5, 8, -2, 12)$. Há três mudanças de sinal. Logo, existem no máximo três TIRs.

Exemplo 6.11 Considere o fluxo de caixa $(-2, -2, 3, 3, 5)$. Há uma mudança de sinal. Logo, existe no máximo uma TIR.

Exemplo 6.12 Considere o fluxo de caixa $(-5, -2, 0, -1, 4, 0, 0, 0, 8)$. Há uma mudança de sinal. Logo, existe no máximo uma TIR.

- Obteremos nas próximas seções afirmativas mais precisas do que “existe(m) no máximo”.

6.4 Existência e Unicidade da TIR

6.4.1 Existência

Exemplo 6.13 Considere o fluxo de caixa ilustrado a seguir.

Figura 6.4

- Possível operação: empréstimo bancário com saldo médio *a priori*.
 - Saldo médio 100, empréstimo 150, taxa de juros declarada 20%.

Uma TIR deve satisfazer a igualdade

$$-100 + \frac{250}{1+R} - \frac{180}{(1+R)^2} = 0.$$

Logo, procuramos raízes para a equação $-100 + 250x - 180x^2 = 0$, que pode ser escrita como

$$18x^2 - 25x + 10 = 0.$$

Como

$$\Delta = (-25)^2 - 4 \times 18 \times 10 = 625 - 720 < 0,$$

concluimos que não existe uma TIR no exemplo em análise.

Apresentaremos a seguir duas condições que, cada uma de forma independente da outra, são suficientes para a existência de pelo menos uma TIR.

Condição E1 Se a_0 e a_n possuem sinais distintos, então o fluxo de caixa possui pelo menos uma TIR.

A figura abaixo ilustra o caso em que $a_0 < 0$ e $a_n > 0$.

Figura 6.5

Intuitivamente, é impossível “completar” o gráfico da função V (que é contínua) sem cortar o eixo horizontal pelo menos uma vez. Logo, existe uma taxa de juros R tal que $V(R) = 0$.

- Argumento formal: aplique Teorema do Valor Intermediário para concluir que existe $R \in (i_1, i_2)$ tal que $V(R) = 0$.
 - *Intermediate Value Theorem* em inglês.
 - Esse teorema está disponível em vários livros-textos, como Bartle e Sherbert (1999) e Lay (2004).
- Observe que a existência de taxas i_1 e i_2 tais que $V(i_1) > 0$ e $V(i_2) < 0$ é assegurada pelas expressões (6.8) e (6.9).
- O mesmo raciocínio pode ser aplicado para o caso em que $a_0 > 0$ e $a_n < 0$.
 - Como assumimos que $a_0 \neq 0$ e $a_n \neq 0$, não há outro caso a considerar.
- Convém relacionar essa condição com a Regra de Sinais de Descartes. Suponha que o fluxo de caixa $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ tem um número ímpar de mudanças de sinal. Logo, s é ímpar. Assim sendo, é possível utilizar a igualdade $m = s - 2k$ e o fato de que k é um inteiro não negativo para concluir que m é igual a um dos números no conjunto $\{s, s - 2, \dots, 3, 1\}$. Logo, existe pelo menos uma TIR. Por outro lado, como s é ímpar, então a_0 e a_n têm sinais distintos. Dessa forma, a Condição E1 também pode ser obtida a partir da Regra de Sinais de Descartes.

Condição E2 Se a_0 e $\sum_{k=0}^n a_k$ não possuem o mesmo sinal, então o fluxo de caixa possui pelo menos uma TIR.

A figura abaixo ilustra o caso em que $a_0 < 0$ e $\sum_{k=0}^n a_k > 0$. Vale ressaltar que a igualdade (6.7) assegura que $V(0) > 0$.

Figura 6.6

Mais uma vez, é impossível “completar” o gráfico da função V sem cortar o eixo horizontal pelo menos uma vez.

- Outros casos:

- $a_0 > 0$ e $\sum_{k=0}^n a_k < 0$: utilizar o mesmo raciocínio.
- $\sum_{k=0}^n a_k = 0$: nesse caso, $R = 0$ é uma TIR (seja qual for o sinal de a_0).

6.4.2 Unicidade

Exemplo 6.14 Considere o fluxo de caixa ilustrado a seguir.

Figura 6.7

Há duas TIRs: -50% e 10% (ver rascunho abaixo).

- Vale ressaltar que $a_0 = -100 < 0$ e $\sum_{k=0}^n a_k = 5 > 0$; consequentemente, uma condição suficiente para a existência não assegura unicidade.

Rascunho

$$\begin{aligned} -100 + \frac{160}{1+R} - \frac{55}{(1+R)^2} &= 0 \\ -100 + 160x - 55x^2 &= 0 \iff 11x^2 - 32x + 20 = 0 \\ \Delta &= (-32)^2 - 4 \times 11 \times 20 = 144 \\ x &= \frac{-(-32) \pm 12}{2 \times 11} = \frac{16 \pm 6}{11} \end{aligned}$$

Há duas raízes, $x_1 = 2$ e $x_2 = 10/11$. Como $1 + R_1 = 1/x_1 = 0,5$ e $1 + R_2 = 1/x_2 = 1,1$, concluímos que $R_1 = -0,5$ e $R_2 = 0,1$.

Apresentamos a seguir uma condição suficiente para a unicidade da TIR.

- Observe que unicidade não garante existência. Ou seja, “unicidade” significa a existência de no máximo uma TIR.

Condição U Se a função valor atual é estritamente decrescente ou estritamente crescente, então existe no máximo uma TIR.

Figura 6.8

Se V é estritamente decrescente ou estritamente crescente, então o seu gráfico corta o eixo horizontal no máximo uma vez.

- Atenção para o uso da expressão “existe no máximo”. De fato, a Condição U não assegura a existência de uma TIR.

6.4.3 Existência e Unicidade: Um Tratamento Simultâneo

Apresentamos a seguir uma condição suficiente para ambas a existência e a unidade da TIR.

Condição EU Se o número de variações de sinal nas coordenadas do fluxo de caixa $a = (a_0, a_1, \dots, a_n)$ for igual a 1, então existe exatamente uma TIR.

Essa condição é consequência da Regra de Sinais de Descartes. Considere a equação (6.14). Suponha que $s = 1$. Se $k \geq 1$, então $m < 0$. Como m é um número não negativo, concluímos então que $k = 0$. Porém, $m = s - 2k$; logo, $m = 1$.

6.5 Investimento Simples

Operações caracterizadas por (a) um único depósito/aporte inicial e (b) um ou mais saques/resgates são conhecidas na literatura como *investimento simples*. Tendo em vista que a maior parte das aplicações financeiras atendem a essas duas condições, esse tipo de operação será estudado em detalhes nesta seção.

Formalmente, um fluxo de caixa $a = (a_0, a_1, \dots, a_n)$ é um *investimento simples* se $a_0 < 0$, $a_k \geq 0$ para todo $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ e $a_n > 0$.

- Os fluxos de caixa dos Exemplos 6.1, 6.2 e 6.3 são do tipo investimento simples.

As expressões (6.10) e (6.11) implicam que $V'(i) < 0$ e $V''(i) > 0$ para todo investimento simples. Logo, a função valor atual é estritamente decrescente e estritamente convexa. Assim sendo, é possível combinar essa última informação com os limites em (6.8) e (6.9) para esboçar o gráfico de V . Isso é feito na figura abaixo, onde se assumiu que $\sum_{k=0}^n a_k > 0$.

Figura 6.9

Dito isso, a seguinte afirmativa é verdadeira: se $a = (a_0, a_1, \dots, a_n)$ é um investimento simples, então a possui exatamente uma taxa interna de retorno.

- Há diversas maneiras de se estabelecer a veracidade da afirmativa em questão.
 - Maneira mais rápida: Condição EU.
 - Caminho alternativo: lidar separadamente com a existência e a unicidade.
 - * Existência: Condição E1.
 - Para o caso em que $\sum_{k=0}^n a_k > 0$, é possível utilizar a Condição E2.

o Unicidade: Condição U.

Adicionalmente, é um exercício relativamente simples mostrar que a TIR de um investimento simples tem o mesmo sinal que o termo $\sum_{k=0}^n a_k$.

- Se $\sum_{k=0}^n a_k = 0$, então $V(0) = 0$. Logo, 0 é a única TIR.
- Se $\sum_{k=0}^n a_k > 0$, então $V(0) > 0$. Como V é estritamente decrescente e $V(R) = 0$, então $R > 0$.
- Se $\sum_{k=0}^n a_k < 0$, então $V(0) < 0$. Como V é estritamente decrescente e $V(R) = 0$, então $R < 0$.

6.6 Cômputo da TIR

Frequentemente, o cômputo da(s) TIR(s) requer o uso de métodos numéricos. Contudo, em algumas situações específicas é possível calcular a(s) TIR(s) de forma analítica. Inicialmente, estudaremos esse último caso. Em seguida, discutiremos a abordagem numérica.

6.6.1 Solução Analítica

Uma vantagem da abordagem analítica é que usualmente ela já trata dos problemas da existência e da unicidade.

- O uso da palavra *usualmente* decorre de uma cautela por parte do seu professor.

O primeiro caso em que é possível obter uma solução analítica é aquele em que $n = 1$. Considere o fluxo de caixa (a_0, a_1) . Nesse caso, a Equação (6.13) resume-se a

$$a_0 + \frac{a_1}{1 + R} = 0.$$

Logo,

$$R = \frac{a_1 - (-a_0)}{-a_0}.$$

Por exemplo, se $(a_0, a_1) = (-24.200, 25.410)$, então $R = 5\%$.

O caso seguinte é uma generalização do primeiro. Suponha que $n \geq 2$ e $a_1 = a_2 = \dots = a_{n-1} = 0$. Assim sendo, a TIR é dada pela solução de

$$a_0 + \frac{a_n}{(1 + R)^n} = 0.$$

Dessa forma,

$$R = \left(-\frac{a_n}{a_0} \right)^{1/n} - 1.$$

Por exemplo, se se $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) = (-100.000, 0, 0, 0, 0, 161.051)$, então $R = 10\%$.

O terceiro e último caso considerado nesta subseção é aquele em que $n = 2$ e $a_1 \neq 0$. Em tal contexto, a Equação (6.13) reduz-se a

$$a_0 + \frac{a_1}{1+R} + \frac{a_2}{(1+R)^2} = 0.$$

Conforme ilustrado nos Exemplos 6.13 e 6.14, é suficiente estudar a equação quadrática $a_0 + a_1x + a_2x^2 = 0$. No primeiro daqueles dois exemplos não existia TIR, ao passo que no segundo havia duas. Suponha agora que $(a_0, a_1, a_2) = (-200, 8, 208)$. Neste caso, $R = 4\%$ é a única TIR; ver detalhes no rascunho abaixo.

Rascunho

$$-200 + 8x + 208x^2 = 0 \iff 26x^2 + x - 25 = 0$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{1^2 - 4 \times 26 \times (-25)} = \sqrt{2.601} = 51$$

$$x = \frac{-1 \pm 51}{2 \times 26}$$

Há duas raízes, $x_1 = 50/52$ e $x_2 = -1$. Como $x_2 < 0$, concluímos que $1 + R = 1/x_1 = 52/50 = 1,04$.

Vale ressaltar que equações polinomiais cúbicas e do quarto grau possuem soluções em forma fechada (*closed-form solutions* em inglês). Porém, essas soluções raramente são utilizadas. Usualmente, tais equações são resolvidas numericamente. Assim sendo, o mesmo vale para o cálculo da TIR nos casos em que $n = 3$ e $n = 4$.

6.6.2 Solução Numérica

Como regra geral, é preciso usar métodos numéricos para computar a TIR quando $n \geq 3$. O Algoritmo de Newton-Raphson, o qual é adotado para resolver equações e sistemas de equações não lineares, é um método bastante popular. A figura abaixo ilustra a utilização do referido procedimento no caso de um investimento simples.

Figura 6.10

Observe que o Algoritmo de Newton-Raphson é um processo iterativo. A taxa i_0 é uma conjectura inicial. Dado i_k , i_{k+1} é calculado de acordo com a fórmula

$$i_{k+1} = i_k - \frac{V(i_k)}{V'(i_k)}. \quad (6.17)$$

Ademais, define-se uma tolerância ε (por exemplo, $\varepsilon = 10^{-5}$). O processo é interrompido quando a condição $|V(i_k)| < \varepsilon$ é satisfeita.

- Também é possível utilizar duas condições: $|V(i_k)| < \varepsilon_1$ e $|i_{k+1} - i_k| < \varepsilon_2$. A iteração somente é interrompida quando as duas condições são satisfeitas.
- Não é difícil entender a lógica subjacente a igualdade (6.17). A equação de uma linha reta no espaço $i \times y$ é dada por $y = \alpha + \beta i$. Dado i_k , $y = V(i_k)$, $\beta = V'(i_k)$ e $0 = \alpha + \beta i_{k+1}$. Assim sendo,

$$\begin{aligned} V(i_k) = -\beta i_{k+1} + V'(i_k) i_k &\implies V(i_k) = -V'(i_k) i_{k+1} + V'(i_k) i_k \\ &\implies -\frac{V(i_k)}{V'(i_k)} = i_{k+1} - i_k. \end{aligned}$$

A última igualdade é claramente equivalente à expressão (6.17).

- Potencial problema: $V'(i_k) \cong 0$.
- Como regra geral, a convergência (ou não) para uma TIR pode depender de i_0 . Isso é particularmente relevante para o caso em que há mais de uma TIR.
- No caso de um investimento simples, usualmente a HP 12C e o Excel (função TIR) funcionam sem qualquer problema.
 - O uso da palavra *usualmente* decorre de uma cautela por parte do seu professor.
- Se o fluxo de caixa não for um investimento simples, então é preciso ser bem mais cuidadoso. Em particular, utilizar o Excel ou outra ferramenta para gerar um gráfico da função valor atual é um bom procedimento.

Exemplo 6.15 Considere o fluxo de caixa $(-100, 160, -55)$, o qual foi estudado no Exemplo 6.14. Há duas TIRs, -50% e 10% . O seu professor recorreu à IA do Google (Gemini) para utilizar o Algoritmo de Newton-Raphson para computar as TIRs. Vale ressaltar que como já se sabia de antemão quais eram as TIRs, não havia risco em se recorrer a uma ferramenta de IA. Segue-se abaixo um sumário dos resultados. Adotou-se a tolerância de $\varepsilon = 10^{-6}$.

- $i_0 = 20\%$: três iterações, $R = 10\%$
- $i_0 = 0\%$: duas iterações, $R = 10\%$
- $i_0 = -10\%$: três iterações, $R = 10\%$
- $i_0 = -30\%$: não houve convergência, $i_1 = 250\%$, $i_2 = -310\%$
- $i_0 = -45\%$: quatro iterações, $R = -50\%$

$i_0 = -60\%$: cinco iterações, $R = 10\%$

Em seguida, o seu professor recorreu ao Excel. Foram utilizados os mesmos valores iniciais. Os resultados foram similares (observe que Excel não informa o número de iterações). A única diferença é que ocorreu a convergência para $R = 10\%$ no caso em que $i_0 = -30\%$. Talvez isso se deva ao fato de que o Excel adota $i_0 = 10\%$ quando não se informa uma conjectura inicial e que possivelmente esse valor inicial foi adotado quando não houve convergência. Vale ressaltar que a conjectura inicial deve ser informada na forma unitária.

Exemplo 6.16 Seja $a = (-76.950, 175.050, -23.000, -175.000, 100.000)$ um fluxo de caixa. Observe que há três mudanças de sinal. Logo, há no máximo três TIRs. As figuras abaixo, geradas no Excel, ilustram o comportamento da função valor atual.

Figuras 6.11, 6.12 e 6.13

Aparentemente, há uma TIR aproximadamente igual a 5%. Adicionalmente, talvez haja uma segunda TIR, com multiplicidade maior do que 1, aproximadamente igual a 11%. Utilizando-se o Excel, com $i_0 = 5\%$ obteve-se a TIR $R_1 = 5,2632\%$ e com $i_0 = 11\%$ obteve-se a TIR $R_2 = 11,1111\%$. Vale ressaltar que se utilizou a função VPL do Excel para conferir se R_1 e R_2 efetivamente são TIRs. Resta analisar a questão da multiplicidade de R_2 (lembre que há no máximo três TIRs e somente identificamos duas). Defina o polinômio $p(x)$ de acordo com

$$p(x) = -76.950 + 175.050x - 23.000x^2 - 175.000x^3 + 100.000x^4.$$

Logo,

$$p'(x) = 175.050 - 46.000x - 525.000x^2 + 400.000x^3$$

e

$$p''(x) = -46.000 - 1.050.000x + 1.200.000x^2.$$

Agora, observe que

$$p' \left(\frac{1}{1 + R_2} \right) = 0,002023364 \quad (6.18)$$

e

$$p'' \left(\frac{1}{1 + R_2} \right) = -189.900,0159 \neq 0.$$

A expressão (6.18) sugere que talvez nós tenhamos um problema (o qual pode ser devido a arredondamentos). Aparentemente, não há uma maneira simples de mudar a tolerância adotada pelo Excel. Assim sendo, o seu professor tentou computar a TIR utilizando a HP 12C. Não houve convergência (mesmo após o seu professor informar 11% como conjectura inicial). Então, o seu professor recorreu ao ChatGPT (OpenAI). Ele informou o fluxo de

caixa e que havia uma TIR próxima de 11,11%. Em seguida, solicitou que se calculasse essa TIR com tolerância de 10^{-8} . A resposta foi $R_2 = 0,1111111115528021$. Porém, o seu professor estava avaliando p' em uma planilha de Excel. Foi preciso trabalhar com $R_2 = 0,1111111115528$ (possivelmente devido a um limite de dígitos no Excel). De toda forma, o seu professor concluiu que

$$p' \left(\frac{1}{1 + R_2} \right) = 6,79691 \times 10^{-7}.$$

Assim sendo, de fato R_2 tem multiplicidade 2. Logo, identificamos as três TIRs: R_1 (multiplicidade 1) e R_2 (multiplicidade 2).

- O último exemplo ilustra um ponto importante: quando a TIR tem multiplicidade maior do que 1, talvez seja necessário adotar uma precisão numérica muito maior. A razão para tanto é que o gráfico da função valor atual é aproximadamente horizontal e ela assume valores muito próximos de zero nas proximidades da TIR.
- Observe $(1 + R_2)^{-1} = 0,899999999964223 \cong 0,9$. Ademais, $p'(0,9) = 0$ e

$$\frac{1}{0,9} - 1 = 0,111\dots$$

- Comentário sobre a construção do fluxo.

6.7 Interpretação

Inicialmente, há que se deixar claro que (A) **somente sob algumas condições** é possível afirmar que quanto maior a for TIR de uma operação, mais rentável ela será para o investidor. Contudo, mesmo que essas condições não sejam satisfeitas, (B) a TIR é uma ferramenta fundamental para a análise da atratividade da operação.

O restante desta seção está dividido em quatro partes. A primeira delas é dedicada ao estudo da Afirmativa A. A segunda contém comentários adicionais sobre a função valor atual. A terceira contém exemplos nos quais a TIR, tomada isoladamente, não é um bom indicador da atratividade de um fluxo de caixa. A última parte é dedicada ao estudo da Afirmativa B. Por fim, a menos que se enuncie o contrário, assume-se ao longo desta seção que não há risco e/ou incerteza de qualquer espécie.

6.7.1 A TIR como Métrica Inequívoca de Rentabilidade

Para que a TIR seja uma “boa medida” da rentabilidade de uma operação, é necessário que ela exista e seja única. Contudo, veremos mais à frente que isso não é suficiente. Dito isso, discutiremos abaixo duas situações em que a TIR é uma “boa medida” de rentabilidade.

- No presente contexto, afirmar que a TIR é uma “boa medida” da rentabilidade significa que quanto maior ela for, mais rentável será a operação sob o ponto de vista do investidor.

Investimento Simples com Recebimento Único Seja $a = (a_0, a_1, \dots, a_n)$ um fluxo de caixa tal que $a_0 < 0$, $a_1 = a_2 = \dots = a_{n-1} = 0$ e $a_n > 0$. Como a é um investimento simples, então existe uma única TIR. Ademais,

$$a_0 + \frac{a_n}{(1+R)^n} = 0 \implies (1+R)^n = -\frac{a_n}{a_0} \implies (1+R)^n = \frac{a_n}{|a_0|}.$$

Logo, mantido constante o desembolso inicial, R será tão maior quanto maior for o montante resgatado.

Investimento Simples com Recebimentos Constantes Seja $a = (a_0, a_1, \dots, a_n)$ um fluxo de caixa tal que $a_0 < 0$, $a_1 = a_2 = \dots = a_{n-1} = a_n = P > 0$. Como a é um investimento simples, então existe uma única TIR. Em tal contexto, a expressão (6.13) pode ser expressa como

$$a_0 + \left[\sum_{k=1}^n \frac{1}{(1+R)^k} \right] P = 0 \implies \sum_{k=1}^n \frac{1}{(1+R)^k} = \frac{|a_0|}{P}.$$

Dessa forma, mantido constante o desembolso inicial, R será tão maior quanto maior for o recebimento periódico P .

6.7.2 Considerações Adicionais Sobre a Função Valor Atual

Já estudamos nesta disciplina o problema de comparar o valor atual de dois fluxos de caixa. Isto é, dada uma taxa de juros i e dois fluxos de caixa a e b , comparam-se os valores atuais desses dois fluxos de caixa.

A lógica subjacente à discussão acima pode ser aplicada para obter uma medida, diferente da TIR, da atratividade de um investimento. Ou seja, dada uma taxa de juros i , um investimento será tão mais atrativo quanto maior for o seu valor atual (avaliado à taxa i). Em particular, um investimento com valor atual negativo deve ser rejeitado. Além disso, ao se compararem dois investimentos, aquele com maior valor atual será preferível.

Um problema do método do valor atual é a escolha da taxa utilizada para descontar o fluxo de caixa. Essa taxa é exógena ao investimento/fluxo de caixa sendo avaliado e não necessariamente a sua identificação é uma tarefa simples. Por sua vez, a TIR somente requer informações do próprio projeto.

6.7.3 Exemplos das Limitações da TIR

Esta subseção contém três exemplos das limitações da TIR. Observe que em todos eles existe uma única TIR.

Exemplo 6.17 Fulano deseja investir R\$ 100,00 pelo prazo de dois anos. As duas opções de investimento disponíveis são dadas pelos fluxos de caixa $a = (-100, 0, 121)$ e $b = (-100, 111)$. Observe que $R_a = 10\% < 11\% = R_b$. Contudo, para que Fulano possa optar entre a e b , ele precisará fazer uma conjectura sobre a taxa de juros pela qual ele será remunerado no segundo ano caso opte por b .

- O exemplo acima ilustra um problema inerente à comparação de investimentos com prazos distintos.
 - Esse problema não afeta somente a TIR.

Exemplo 6.18 Fulano deseja investir R\$ 100,00 pelo prazo de cinco anos. As opções de investimento disponíveis são dadas pelos fluxos de caixa $a = (-100, 5, 5, 5, 5, 105)$ e $b = (-100, 95, 6, 6, 6, 6)$. As respectivas funções valor atual estão ilustradas na figura que se segue.

Figura 6.14

Observe que $R_a = 5\%$, $R_b = 12,8883\%$ e $i' = 1,6008\%$. Apesar de R_b ser maior que R_a , o fluxo de caixa a é superior ao fluxo de caixa b se a taxa de desconto relevante for inferior a i' .

- Vale ressaltar que i' é a TIR do fluxo de caixa $a - b$.

Exemplo 6.19 Fulano deseja contrair um empréstimo bancário de R\$ 1.000,00 pelo prazo de um mês. Segundo o gerente da agência bancária na qual ele tem conta, se Fulano mantiver um saldo médio na conta bancária de pelo menos R\$ 1.000,00 por um mês, então ele conseguirá contrair o referido empréstimo sem que sejam cobrados juros (ou seja, a taxa de juros será zero). Será que Fulano deve aceitar essa operação? Segue-se o gráfico do fluxo de caixa.

Figura 6.15

A função valor atual é dada por

$$V(i) = -1.000 + \frac{2.000}{1+i} - \frac{1.000}{(1+i)^2}. \quad (6.19)$$

Logo, uma TIR deve satisfazer a igualdade

$$-1.000 + \frac{2.000}{1+R} - \frac{1.000}{(1+R)^2} = 0.$$

Assim sendo, é preciso achar as raízes da equação $-1.000 + 2.000x - 1.000x^2 = 0$, a qual pode ser escrita como

$$x^2 - 2x + 1 = 0.$$

Observe que $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 0$. Desta forma,

$$x = \frac{-(-2) \pm 0}{2 \times 1} = 1 \implies R = 0.$$

Concluimos então que 0 é a única TIR da operação. Observe agora que a expressão (6.19) implica que

$$V'(i) = -\frac{2.000}{(1+i)^2} + 2 \times \frac{1.000}{(1+i)^3} = \frac{2.000}{(1+i)^3}[-(1+i) + 1] \implies V'(i) = -\frac{2.000i}{(1+i)^3}.$$

Logo, $V'(0) = 0$, $V'(i) > 0$ para $i < 0$ e $V'(i) < 0$ para $i > 0$. Como $V(0) = 0$, $V(i)$ necessariamente assumirá um valor negativo para todo $i \neq 0$. Podemos então concluir que Fulano deve rejeitar a operação para todo $i \neq 0$, sendo ele indiferente para $i = 0$.

- Um analista apressado poderia, após calcular a TIR, concluir que de fato Fulano teria oportunidade de contrair um empréstimo sem pagar juros. Porém, a operação acima na verdade é um investimento, pois $a_0 < 0$.

Concluiremos esta subseção com um breve comentário sobre a utilização da TIR. De acordo com uma “regra de bolso” bastante popular, um investimento deve ser aceito se a sua TIR for maior do que a taxa de desconto do investidor. Porém, (i) ela só é válida se a função valor atual for decrescente. Ademais, (ii) é preciso levar em conta os investimentos alternativos. Ver Figura 6.14.

6.7.4 A Relevância da TIR na Análise de um Fluxo de Caixa

Considere mais uma vez o fluxo de caixa discutido no Exemplo 6.16. Há duas TIRs, $R_1 = 5,2632\%$ e $R_2 = 11,1111\%$. Adicionalmente, a análise das Figuras 6.11, 6.12 e 6.13 nos permite concluir que:

1. $V(i) > 0$ para $i < R_1$;
2. $V(i) = 0$ para $i = R_1$;
3. $V(i) < 0$ para $R_1 < i < R_2$;

4. $V(i) = 0$ para $i = R_2$;
5. $V(i) < 0$ para $i > R_2$.

O exemplo acima ilustra o seguinte fato: mesmo que a TIR não possa ser utilizada como um critério definitivo para avaliar a atratividade de um investimento, ela é uma ferramenta necessária para identificar para quais valores de i a função valor atual assume valores positivos, nulos ou negativos.

Referências

- Bartle, Robert G. e Donald R. Sherbert (1999). *Introduction to Real Analysis*. 3ª edição. Wiley.
- De Faro, Clovis (2006). *Fundamentos da Matemática Financeira: Uma Introdução ao Cálculo Financeiro e à Análise de Investimentos de Risco*. Saraiva.
- Lay, Steven R. (2004). *Analysis with an Introduction to Proof*. 4ª edição. Pearson Prentice Hall.
- Lial, Margaret L., John Hornsby, David I. Schneider, Callie J. Daniels (2017). *College Algebra & Trigonometry*. 6ª edição global. Pearson Education.
- Samanez, Carlos Patricio (2010). *Matemática Financeira: Aplicações à Análise de Investimentos*. 5ª edição. Pearson Prentice Hall.

Figura 6.1

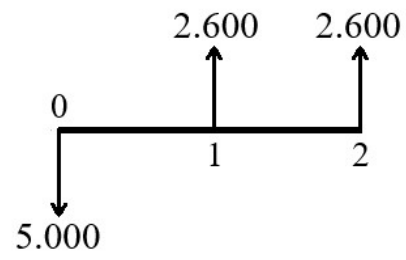


Figura 6.2

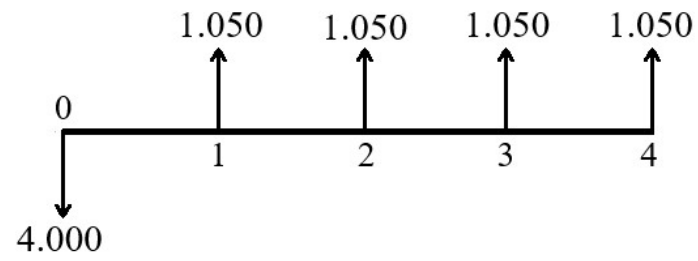


Figura 6.3

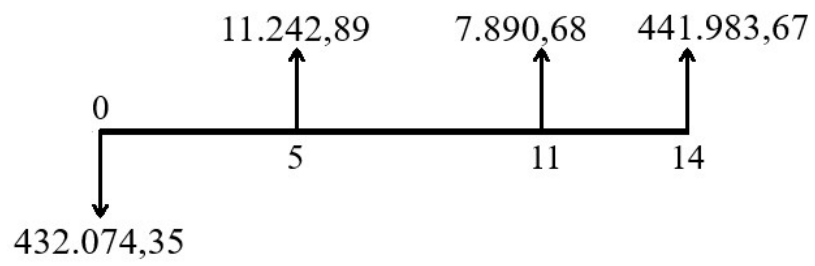


Figura 6.4

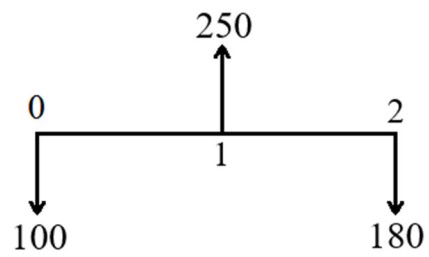


Figura 6.5

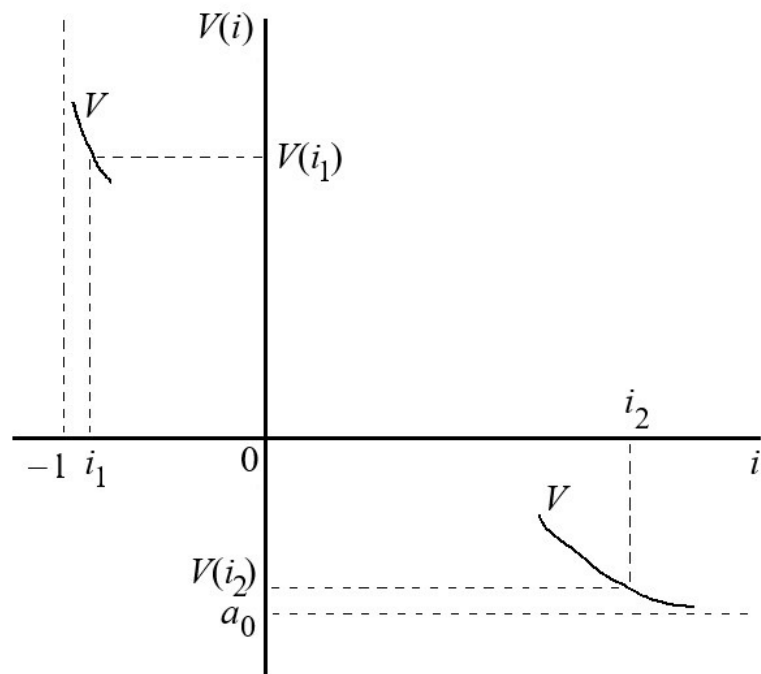


Figura 6.6

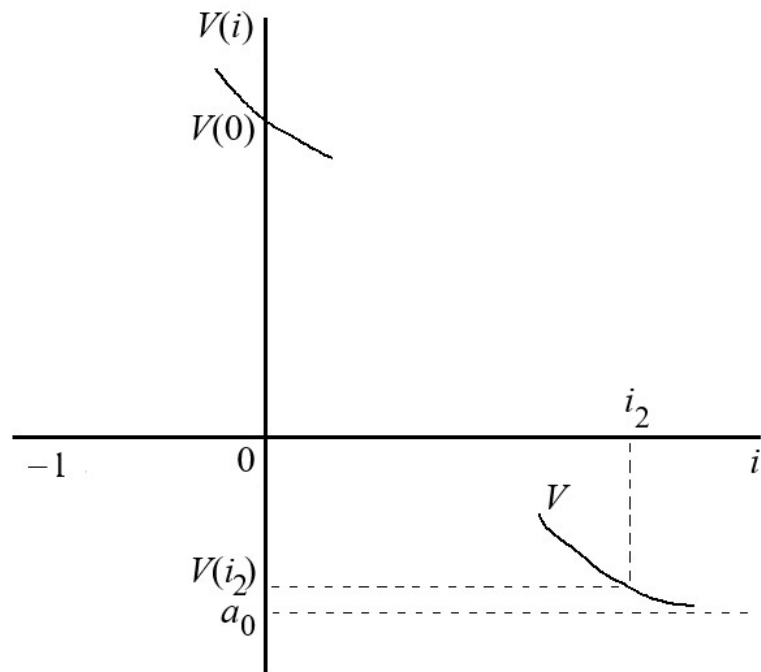


Figura 6.7

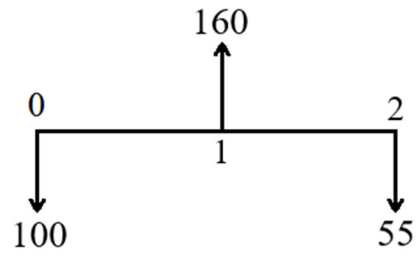


Figura 6.8

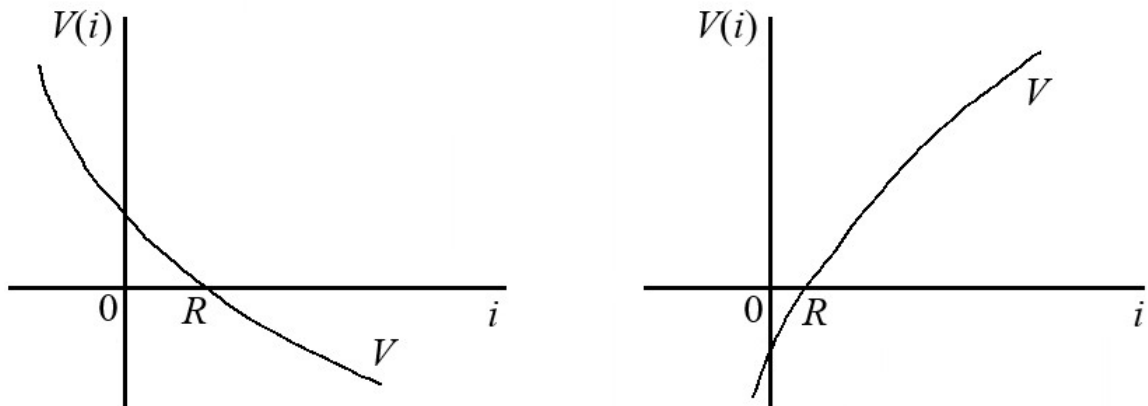


Figura 6.9

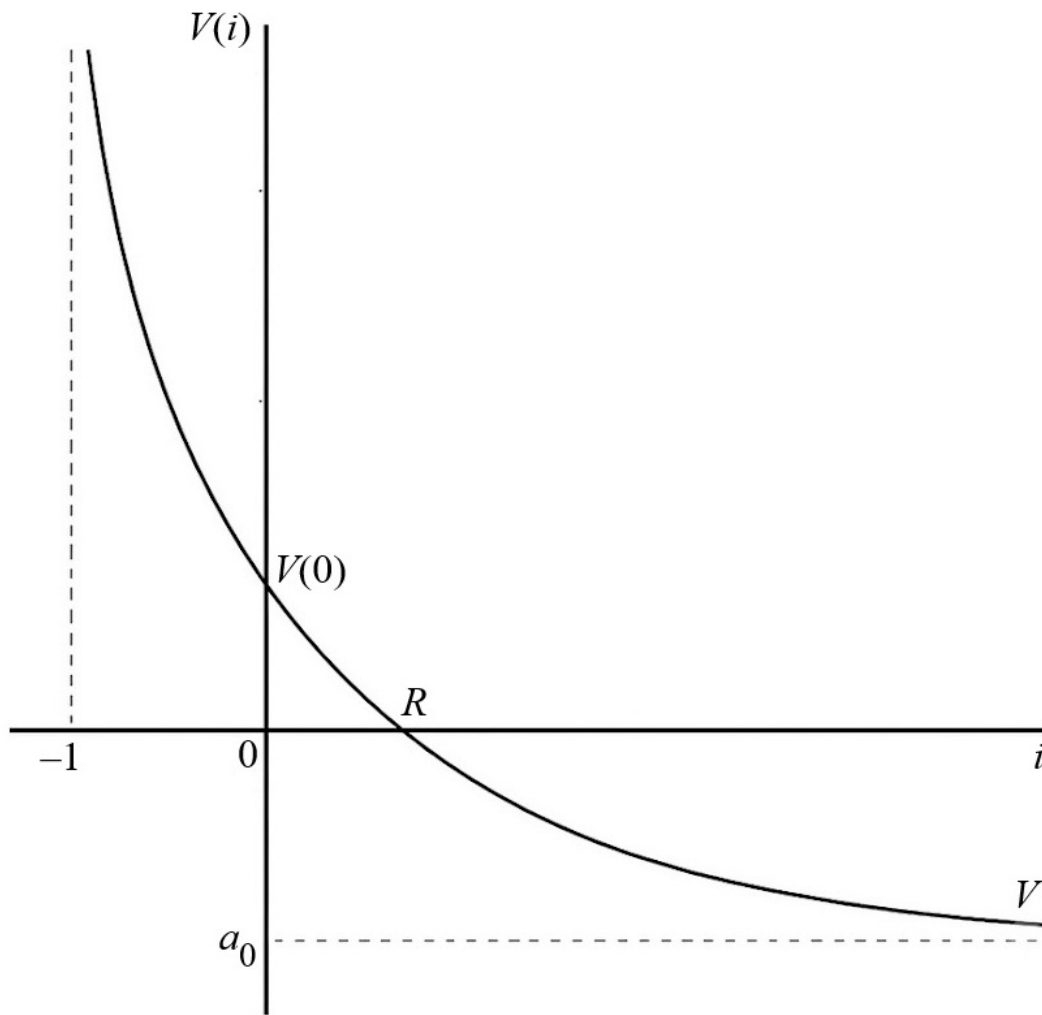


Figura 6.10

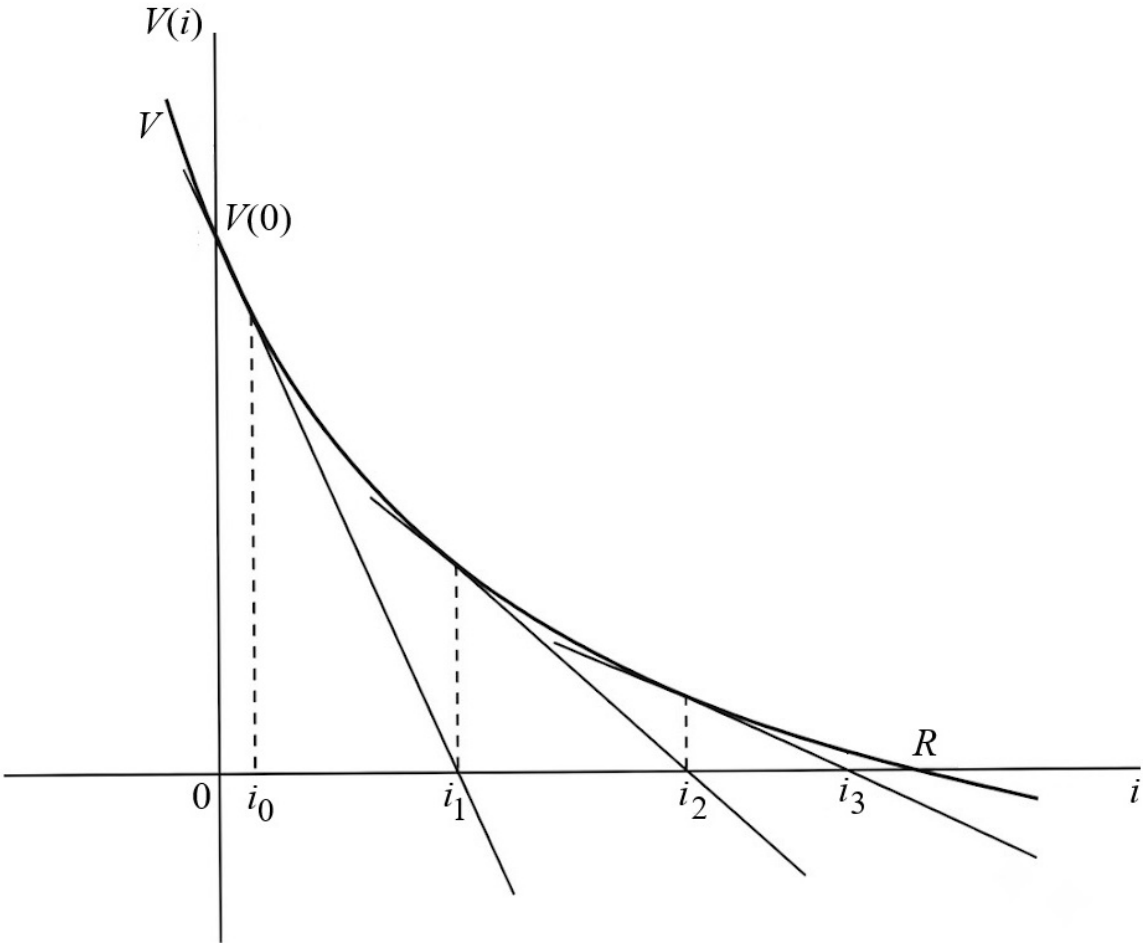


Figura 6.15

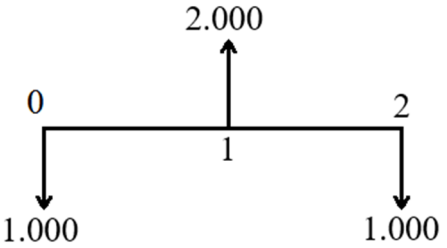


Figura 6.11

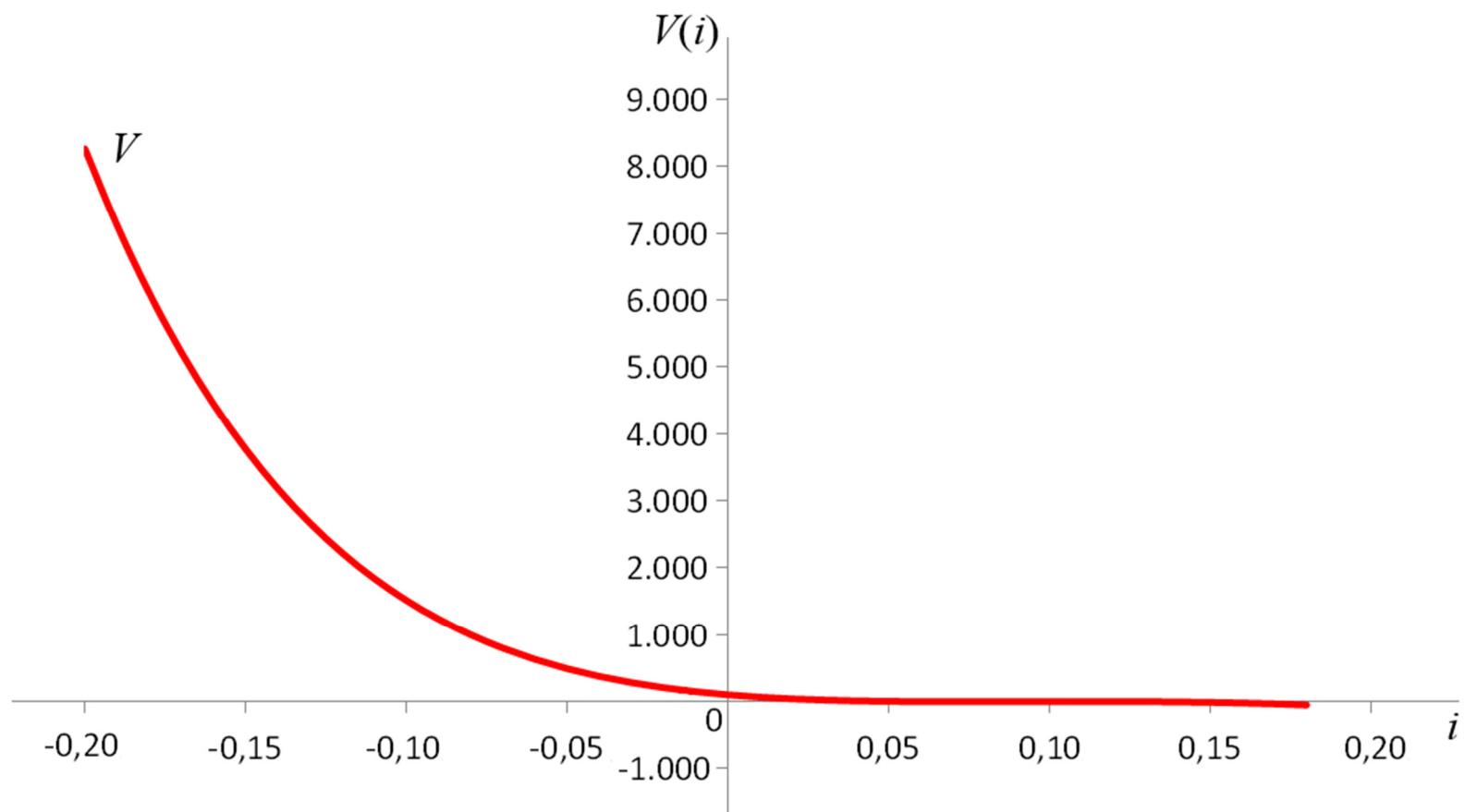


Figura 6.12

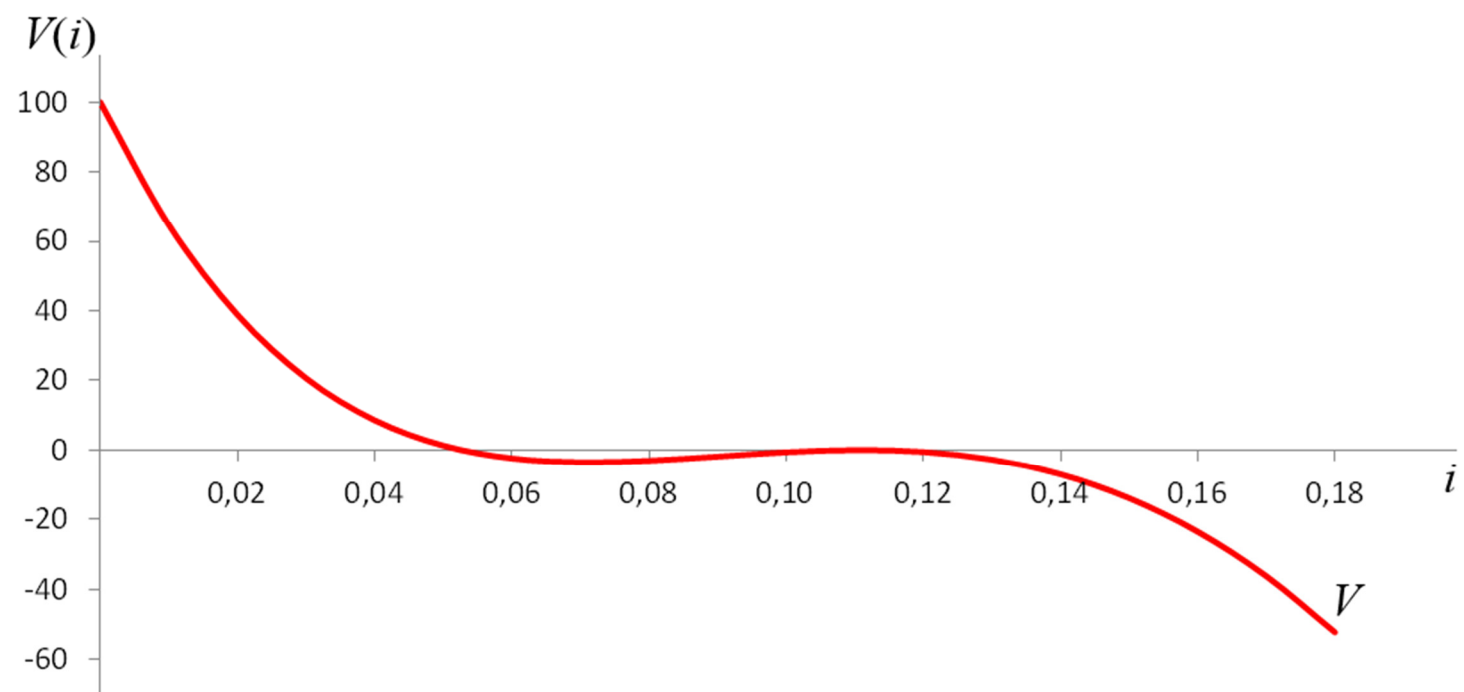


Figura 6.13

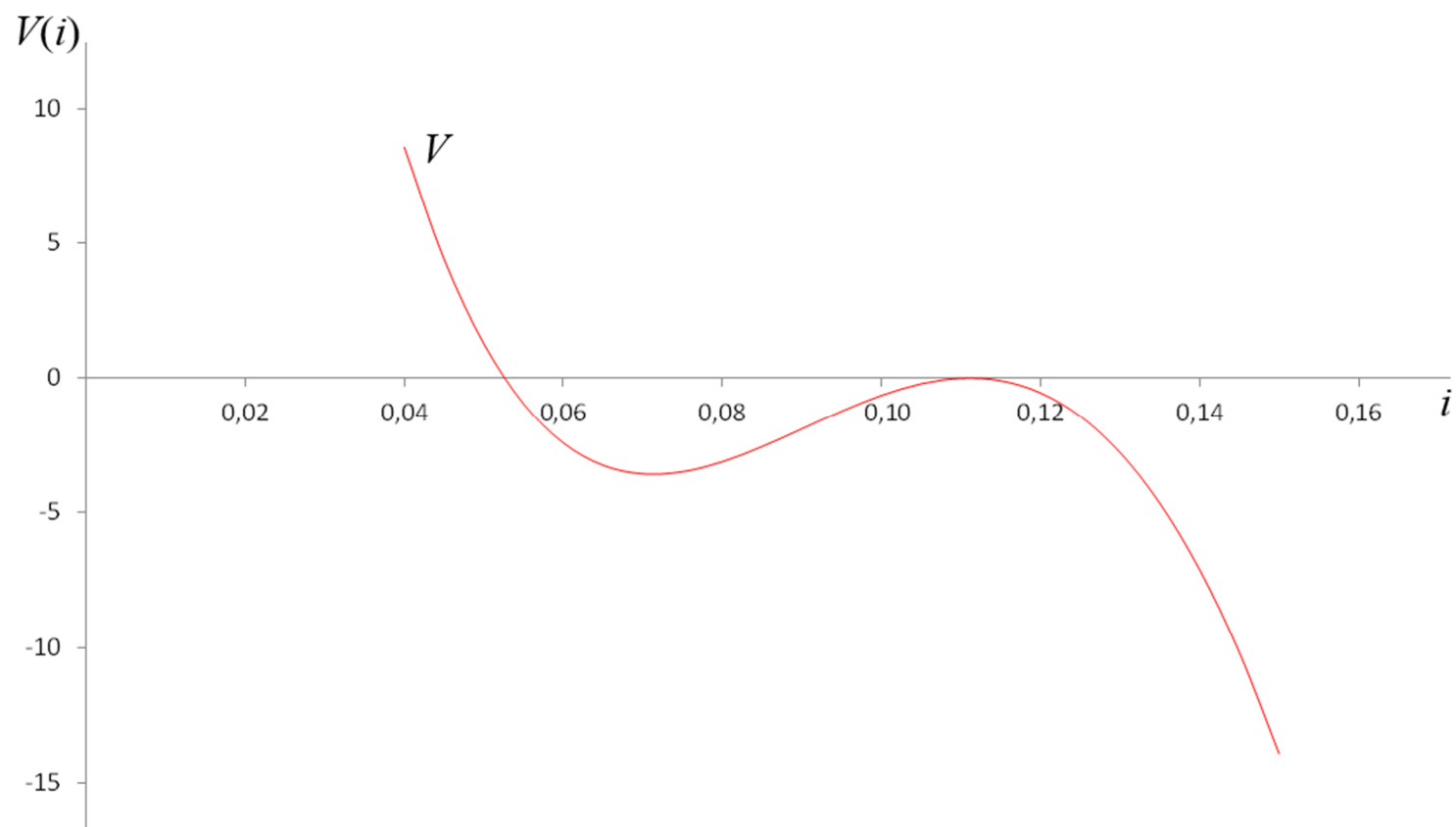


Figura 6.14

