

MATEMÁTICA FINANCEIRA:

NOTAS DE AULA

Alexandre B. Cunha

4 Os Vários Conceitos de Taxas de Juros

4.1 Introdução

As taxas de juros são expressas das mais variadas maneiras. A título de ilustração, considere os exemplos que se seguem.

Exemplo 4.1 De acordo com as informações divulgadas pelo Banco Central do Brasil, em 6 de julho de 2026 o fator Selic diário foi igual a 1,00052531 e a taxa Selic foi igual 14,15% ao ano. Qual é a relação entre aquele fator e essa taxa?

Exemplo 4.2 No dia 13 de julho de 2026, um correntista do Banco do Brasil poderia investir R\$ 500,00 em um CDB prefixado pelo prazo de 35 dias corridos (resgate em 17 de agosto de 2026) à taxa de 10,7909% a.a. Qual seria a taxa de rentabilidade da operação?

Exemplo 4.3 De acordo com as informações divulgadas pela instituição financeira americana Wells Fargo Bank, N.A., em 6 de julho de 2026 uma pessoa residente no *ZIP Code* (CEP) 55455 poderia investir em um CD (*certificate of deposit*) pelo prazo de 7 meses com um APY (*annual percentage yield*) de 3,24% e uma *interest rate* de 3,19%. Qual é a relação entre essas duas taxas?

Estudaremos neste tópico algumas das maneiras que as taxas de juros são expressas e o conceito de equivalência entre taxas de juros. Feito isto, na última seção deste tópico responderemos as perguntas acima colocadas e, também, discutiremos algumas questões relacionadas.

4.2 Taxas Proporcionais

Sejam i e i' duas taxas de juros e β a razão entre unidades de mensuração do tempo nas quais as taxas i e i' estão referenciadas.

- Por exemplo, se i é uma taxa anual e i' é uma taxa mensal, então $\beta = 12$.

As taxas i e i' são ditas *proporcionais* quando

$$\frac{i}{i'} = \beta. \quad (4.1)$$

- Observe que o conceito de taxas proporcionais não depende do regime de capitalização.

Exemplo 4.4 Qual é taxa anual i_1 proporcional à taxa de 2% a.m.?

$$\frac{i_1}{2\%} = 12 \implies i_1 = 24\%$$

Exemplo 4.5 Qual é taxa diária i_2 proporcional à taxa de 3% a.m.?

$$\frac{3\%}{i_2} = 30 \implies i_2 = 0,1\%$$

Exemplo 4.6 Qual é taxa mensal i_3 proporcional à taxa de 6% a.a.?

$$\frac{6\%}{i_3} = 12 \implies i_3 = 0,5\%$$

4.3 Taxas Equivalentes

Duas taxas de juros i e i' são ditas *equivalentes* se em um mesmo prazo elas levarem ao mesmo montante.

- Ao contrário da proporcionalidade, a equivalência depende do regime de capitalização adotado.
- Comentário sobre o uso da palavra *se* em uma definição matemática.

4.3.1 Taxas Equivalentes no Regime de Juros Simples

Sejam i e i' duas taxas de juros referenciadas em unidades de tempo distintas. Considere dois investimentos, ambos com o mesmo capital inicial C pelo prazo n . Esse prazo é mensurado na unidade de tempo subjacente à taxa i . As respectivas taxas de juros são justamente i e i' . Seja β o parâmetro utilizado na definição de taxas proporcionais. Os respectivos fluxos de caixa estão ilustrados na figura abaixo, sendo S e S' os montantes associados, respectivamente, às taxas i e i' .

Figura 4.1

Logo,

$$S = C(1 + in)$$

e

$$S' = C[1 + i'(\beta n)].$$

Agora, observe que

$$S = S' \iff C(1 + in) = C[1 + i'(\beta n)] \iff i = i'\beta \iff \frac{i}{i'} = \beta.$$

Compara a última igualdade com a expressão (4.1). Como i e i' são equivalentes se e somente se $S = S'$, então concluímos que no Regime de Juros Simples (i) duas taxas proporcionais são equivalentes e (ii) duas taxas equivalentes são proporcionais.

4.3.2 Taxas Equivalentes no Regime de Juros Compostos

Exceto pelo regime de capitalização, mantenha todas as hipóteses adotadas no começo da Subseção 4.3.1. Nesse novo contexto,

$$S = C(1 + i)^n$$

e

$$S' = C(1 + i')^{\beta n}.$$

Desta forma,

$$S = S' \iff C(1 + i)^n = C(1 + i')^{\beta n} \iff (1 + i)^n = (1 + i')^{\beta n}.$$

Assim sendo, as taxas i e i' são equivalentes no Regime de Juros Compostos se e somente se

$$1 + i = (1 + i')^\beta.$$

Exemplo 4.7 Ache a taxa i_4 mensal e a taxa i_5 diária equivalentes a taxa de 25% a.a.

$$1 + i_4 = (1 + 0,25)^{1/12} \implies i_4 = 1,8769\%$$

$$1 + i_5 = (1 + 0,25)^{1/360} \implies i_5 = 0,0620\%$$

Exemplo 4.8 Ache a taxa i_6 anual e a taxa i_7 diária equivalentes a taxa de 0,5% a.m.

$$1 + i_6 = (1 + 0,005)^{12} \implies i_6 = 6,1678\%$$

$$1 + i_7 = (1 + 0,005)^{1/30} \implies i_7 = 0,0166\%$$

4.4 Taxas Declaradas e Taxas Efetivas

Dada uma taxa de juros qualquer cujo intervalo de capitalização seja distinto daquele a que se refere a dita taxa, diz-se que esta é uma taxa *declarada*. A taxa *efetiva* é igual a taxa proporcional à taxa declarada expressa no mesmo período a que se refere o intervalo de capitalização.

Exemplo 4.9 Ache a taxa mensal efetiva i_8 associada à taxa declarada de 6% a.a. com capitalização mensal.

$$i_8 = \frac{6\%}{12} \implies i_8 = 0,5\%$$

Vale ressaltar que a taxa anual equivalente à taxa i_8 é igual a 6,1678% (ver Exemplo 4.8).

- De Faro (2006) e Samanez (2010) se referem às taxas declaradas como *taxas nominais*. Para evitar confusão com o conceito de taxa de juros nominal adotada nos textos de macroeconomia, não utilizaremos essa terminologia.
- Estados Unidos: *display interest rates* (taxas de juros de ‘vitrine’).

4.5 Taxa Over

No Brasil, a chamada *taxa over* é uma taxa por dia útil. De acordo com Samanez (2010), ela “é geralmente adotada em operações financeiras no mercado aberto”.

- O *mercado aberto* é o mercado de títulos de renda fixa. O emissor do título pode ser um agente público (i.e., governo) ou privado.
 - Inglês: *public* and *private* não são as melhores traduções.
 - * Uma *public company* é uma sociedade anônima de capital aberto.

A duas principais taxas over são a Selic e a DI. Estudaremos a seguir essas duas taxas. Porém, isso requer a discussão prévia de uma “jabuticaba”.

4.5.1 Número de Dias Úteis por Ano

No mercado financeiro brasileiro, utiliza-se a convenção de que um ano tem 252 dias úteis.

- Circular nº 2.761 de 18 de junho de 1997 do Banco Central do Brasil.
- $252 = 365 - (52 + 52 + 9)$
 - 52 sábados, 52 domingos e 9 feriados
 - * Número de feriados: feriado que cai no sábado ou no domingo não entra na conta. Havia 12 feriados e $(12/7) \times 5 = 8,571$.
- Fonte para os feriados: ANBIMA, ver link no site da disciplina.
- Evidentemente, nem todos os anos terão 252 dias úteis. Por exemplo, 2023 teve 249.
 - $249 = 365 - (52 + 53 + 11)$
 - O dia 20 de novembro não foi feriado nacional em 2023.
- A introdução do feriado acima mencionado não impactou o número médio de dias úteis (252), pois $(13/7) \times 5 = 9,286$.

4.5.2 A Taxa Selic Over

A taxa Selic over é a taxa média das operações compromissadas (lastreadas em títulos públicos federais) com prazo de um dia realizadas no Selic. Essa taxa, quando expressa na forma percentual, deve conter seis casas decimais.

- O *fator* Selic diário é anunciado com oito casas decimais.
 - O fator é igual a um mais a taxa (expressa na forma unitária).

A taxa Selic over diária pode ser expressa na forma anual. Sejam i_{du} e i_a as respectivas taxas por dia útil e anual. Elas se relacionam de acordo com a fórmula

$$1 + i_a = (1 + i_{du})^{252}. \quad (4.2)$$

Por convenção, a taxa anual, na forma percentual, é expressa com duas casas decimais. A título de ilustração, assumamos que $i_{du} = 0,050788\%$. Logo, $i_a = 13,65\%$.

- Não confunda a taxa Selic over na forma anual com a meta para a taxa Selic anunciada pelo Copom.
- A ideia é que as taxas i_{du} e i_a sejam equivalentes (ver Subseção 4.3.2).

4.5.3 A Taxa DI Over

A taxa DI over é a taxa média das operações interbancárias com prazo de um dia registradas e liquidadas pelos sistemas da B3. Essa taxa, quando expressa na forma percentual, deve conter seis casas decimais. A taxa DI over diária e a taxa anual se relacionam conforme especificado na igualdade (4.2). Evidentemente, os comentários sobre a perda de precisão ao se usar duas decimais também se aplicam à taxa DI.

4.6 De Volta aos Exemplos 4.1, 4.2 e 4.3

4.6.1 Análise do Exemplo 4.1

Lembre que o fator Selic diário foi igual a 1,00052531 em 6 de julho de 2026. Agora, observe que

$$1,00052531^{252} = 1,141500200. \quad (4.3)$$

Dito isto, faça $i_{du} = 0,052531\%$ e $i_a = 14,15\%$. Em seguida, utilize a igualdade (4.3) para concluir que essas últimas duas taxas satisfazem à expressão (4.2). Ou seja, o fator diário e a taxa anual divulgados pelo Banco Central do Brasil são, respectivamente, iguais a $1 + i_{du}$ e i_a .

- Existe também a taxa over mensal. Surpreendentemente, a dita taxa tem capitalização por dia útil, mas assume que um mês tem 30 dias. Como $0,052531 \times 30 = 1,57593$, a taxa over mensal é igual a 1,57593% no exemplo em análise.
 - Para que seja possível obter a taxa over diária a partir da taxa over mensal de forma precisa, é necessário que essa última taxa esteja expressa com cinco casas decimais.

4.6.2 Análise do Exemplo 4.2

Sejam C e S , respectivamente, o capital investido e o montante resgatado. A taxa i de rentabilidade da operação, na forma unitária, é dada por

$$i = \frac{S - C}{C}.$$

Seja i_a a taxa anual anunciada pela instituição financeira. As taxas i e i_a são equivalentes (no sentido discutido na Subseção 4.3.2). Logo, elas se relacionam de acordo com a fórmula

$$1 + i = (1 + i_a)^{n/N},$$

onde n é o número de dias da operação e N é o número de dias do ano. No mercado brasileiro, há pelo menos três maneiras de mensurar n e N :

Matemática Financeira

1. n é igual ao número de dias corridos e $N = 360$;
2. n é igual ao número de dias corridos e $N = 365$;
3. n é igual ao número de dias úteis e $N = 252$.

- Comentários:

- Aparentemente, no Brasil essas três são as únicas opções possíveis para um CDB.
 - * Razão: regras de registro da Cetip/B3.
 - * Logo, a Opção 2 não é modificada em anos bissextos.
- Discutir contato (por telefone) com dois bancos brasileiros.

Dito isso, iremos agora computar a rentabilidade do CDB mencionado no exemplo utilizando cada uma das três opções acima.

Opção 1. Neste caso,

$$1 + i = \left(1 + \frac{10,7909}{100}\right)^{35/360} \implies i = 1,0013\%.$$

Opção 2. De forma similar,

$$1 + i = \left(1 + \frac{10,7909}{100}\right)^{35/365} \implies i = 0,9875\%.$$

Opção 3. É preciso computar o número de dias úteis. De 13 de julho a 17 de agosto há 5 sábados, 5 domingos e nenhum feriado. Logo, o número de dias úteis é igual a 25. Assim sendo,

$$1 + i = \left(1 + \frac{10,7909}{100}\right)^{25/252} \implies i = 1,0218\%.$$

- Atenção: “no mundo real”, as regras de arredondamento (ou truncamento) precisam ser respeitadas.
 - Observe que as regras podem contemplar até mesmo o momento em que se aplica um arredondamento (ou truncamento).
- Para prazos longos, a contagem dos fins de semana e feriados é algo bem trabalhoso.
 - Atenção para o comentário feito em aula.
 - Uma solução: utilizar a função DIATRABALHOTOTAL do Excel e subtrair os feriados informados pela ANBIMA.

4.6.3 Análise do Exemplo 4.3

Conforme mencionado previamente, em 6 de julho de 2026 o Wells Fargo Bank anunciou que o APY e a *interest rate* para alguns dos seus certificado de depósito eram iguais a, respectivamente, 3,24% e 3,19%. A *interest rate* é uma taxa anual com capitalização mensal equivalente ao APY, pois

$$\left(1 + \frac{0,0319}{12}\right)^{12} = 1,0324.$$

Logo, o investidor será remunerado pelo APY. Porém, o prazo do investimento era de 7 meses. Assim sendo, a cada mês ele será remunerado por uma taxa mensal equivalente à taxa de 3,24% a.a.

- Vale ressaltar que a tecla “i” da calculadora HP 12C tem a opção “12÷” em azul.

Com os números considerados acima, a relação da APY e da *interest rate* parece ser extremamente simples. Contudo, para outros valores informados pelo próprio Wells Fargo Bank, a análise já não é tão direta. A título de ilustração, considere a tabela que se segue.

Tabela 4.1
Wells Fargo Bank: Interest Rate e APY

As variáveis i e y denotam, respectivamente, a *interest rate* e o APY divulgados pela instituição financeira. A taxa i' é computada a partir do y anunciado utilizando-se a fórmula

$$i' = 12 \times \left\{ \left[\left(1 + \frac{y}{100}\right)^{1/12} - 1 \right] \times 100 \right\},$$

sendo que o resultado final é arredondado para duas casas decimais. A taxa i'' é computada utilizando a mesma fórmula. Contudo, o termo entre colchetes é arredondado para cinco decimais; em seguida, o resultado final é arredondado para duas decimais. Por sua vez, a taxa y' é dada pela expressão

$$y' = \left\{ \left[\left(1 + \frac{i}{100}\right)^{12} - 1 \right] \times 100 \right\},$$

sendo o resultado final arredondado para duas casas decimais. Por sua vez, a taxa y'' é calculada utilizando a mesma expressão. Porém, arredondam-se o termo entre parênteses para cinco casas decimais e o resultado final para duas casas decimais.

Matemática Financeira

- Os procedimentos intermediários de arrendodamento utilizados no cômputo de i'' e y'' foram obtidos através de uma abordagem de tentativa e erro.

Faremos agora um exercício similar utilizando taxas (*interest rate* e APY) divulgadas pelo Citibank. Essas taxas estavam em vigor de 24 a 30 de setembro de 2024.

Tabela 4.2
Citibank: Interest Rate e APY

As definições das variáveis são idênticas às da Tabela 4.1. Observe que i'' difere de i apenas para o prazo de 15 meses com taxas mais elevadas. Porém, y'' difere de y em cinco ocasiões.

- Esse resultado sugere que o APY é a variável primitiva. Ou seja, primeiro a instituição financeira define o APY para depois computar a *interest rate*.
 - Vale ressaltar que a remuneração do investidor está definida pelo APY. Logo, pequenas diferenças (mesmo que sejam decorrentes de arredondamento) nessa taxa podem gerar problemas para o banco.
- Análise similar foi feita para taxas anunciadas pelo Bank of America em 15 de julho de 2026. Aparentemente, essa instituição somente utiliza arrendodamento no resultado final ou realiza também um arredondamento intermediário com seis casas decimais.

Referências

De Faro, Clovis (2006). *Fundamentos da Matemática Financeira: Uma Introdução ao Cálculo Financeiro e à Análise de Investimentos de Risco*. Saraiva.

Samanez, Carlos Patricio (2010). *Matemática Financeira: Aplicações à Análise de Investimentos*. 5ª edição. Pearson Prentice Hall.

Figura 4.1

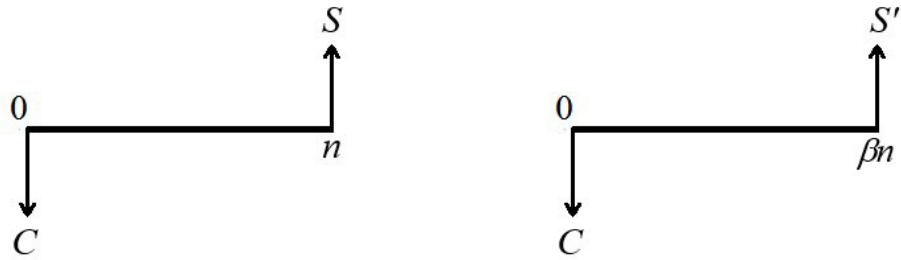


Tabela 4.1

Wells Fargo Bank: *Interest Rate* e APY

Prazo (Meses)	Taxas Anunciadas		Taxas Computadas			
	i	y	i'	i''	y'	y''
4	2,95	2,99	2,95	2,95	2,99	2,99
4	3,20	3,25	3,20	3,20	3,25	3,25
7	3,19	3,24	3,19	3,19	3,24	3,24
7	3,44	3,50	3,45	3,44	3,49	3,50

Nota 1: os valores de i e y estavam disponíveis na internet em 6 de julho de 2026.

Nota 2: dado um prazo qualquer, as taxas mais elevadas estão disponíveis apenas para clientes que atendem a critérios de relacionamento com a instituição (*relationship rates*).

Nota 3: taxas computadas em negrito diferem das correspondentes taxas anunciadas.

Tabela 4.2

Citibank: *Interest Rate* e *APY*

Prazo (Meses)	Taxas Anunciadas		Taxas Computadas			
	i	y	i'	i''	y'	y''
1	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05
2	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05
3	4,40	4,50	4,41	4,40	4,49	4,49
3	4,64	4,75	4,65	4,64	4,74	4,74
4	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05
5	4,31	4,40	4,31	4,31	4,40	4,39
6	3,68	3,75	3,69	3,68	3,74	3,75
7	3,68	3,75	3,69	3,68	3,74	3,75
8	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05
9	2,96	3,00	2,96	2,96	3,00	3,00
10	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05
11	3,68	3,75	3,69	3,68	3,74	3,75
12	2,96	3,00	2,96	2,96	3,00	3,00
12	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05
13	0,10	0,10	0,10	0,10	0,10	0,10
14	0,10	0,10	0,10	0,10	0,10	0,10
15	0,50	0,50	0,50	0,50	0,50	0,51
15	1,00	1,01	1,01	1,01	1,00	1,00
18	2,71	2,75	2,72	2,71	2,74	2,75
24	1,98	2,00	1,98	1,98	2,00	2,00
30	0,10	0,10	0,10	0,10	0,10	0,10
36	1,98	2,00	1,98	1,98	2,00	2,00
48	1,98	2,00	1,98	1,98	2,00	2,00
60	1,98	2,00	1,98	1,98	2,00	2,00

Nota 1: os prazos de 3 e 15 meses possuem dois conjuntos de taxas devido ao fato que, nos prazos em questão, as taxas variam conforme o valor investido.

Nota 2: o prazo de 12 meses possui dois conjuntos de taxas devido ao fato de que, no prazo em questão, o banco oferece o investimento tradicional e outro com a opção de saque antecipado sem penalidade.

Nota 3: taxas computadas em negrito diferem das correspondentes taxas anunciadas.