

MATEMÁTICA FINANCEIRA:

NOTAS DE AULA

Alexandre B. Cunha

3 O Regime de Juros Compostos

3.1 Introdução

Conforme discutido no Tópico 1, no Regime de Juros Compostos os juros e a trajetória do capital são dados por, respectivamente,

$$C_n - C_{n-1} = iC_{n-1},$$

ao passo que a trajetória do capital é dada por

$$C_n = C_0(1 + i)^n. \quad (3.1)$$

Exemplo 3.1 Fulano investiu R\$ 100,00 pelo prazo de 42 anos à taxa de 5% a.a. Qual será o valor resgatado?

Figura 3.1

Aplique a expressão (3.1) para concluir que

$$C_{42} = 100(1 + 0,05)^{42} = 776,16.$$

Logo, o valor resgatado será igual a R\$ 776,16.

- Se o arredondamento fosse feito ano a ano, então o montante seria igual a R\$ 776,23.
- No Regime de Juros Simples, a mesma operação levaria a um montante de R\$ 310,00.

Exemplo 3.2 Fulano precisará quitar uma dívida, daqui a oito meses, no valor de R\$ 15 mil. Sabendo que a taxa de juros é de 0,5% a.m., qual é o valor que ele deve investir hoje, de forma a resgatar justamente o valor da dívida a ser paga?

Figura 3.2

Mais uma vez, aplique a expressão (3.1). Esse procedimento estabelece que

$$15.000 = C_0(1 + 0,005)^8 \implies C_0 = 14.413,28.$$

Assim sendo, Fulano deve investir R\$ 14.413,28.

Exemplo 3.3 Fulano investiu R\$ 357,42 à taxa de 1% a.m. e resgatou R\$ 394,81. Qual foi o prazo da aplicação? Observe que a resposta deve ser um número inteiro.

Figura 3.3

Observe que $S = C(1 + i)^n$. Desta forma,

$$394,81 = 357,42 \times 1,01^n \implies n = \frac{\ln(394,81/357,42)}{\ln 1,01}.$$

Logo, $n = 9,99872$. Como o prazo deve ser inteiro, então possivelmente 10 é a resposta desejada. De fato,

$$357,42 \times 1,01^{10} = 394,81.$$

Assim sendo, o prazo foi de 10 meses.

3.2 Prazos Fracionários

Suponha que alguém pretenda investir C_0 à taxa i , pelo prazo m , sendo que $m = n + f$, $n \in \mathbb{N}$ e $f \in (0, 1)$. Há duas soluções comuns para essa questão, a Convenção Linear e a Convenção Exponencial. Em ambas, C_n é dado pela expressão (3.1); ou seja, utiliza-se o Regime de Juros Compostos para a parte inteira do prazo.

3.2.1 A Convenção Linear

Na Convenção Linear, utiliza-se Regime de Juros Simples para a parte fracionária do prazo.

Figura 3.4

Lembre que C_n é dado pela expressão (3.1). Por sua vez, C_m é avaliado conforme

$$C_m = C_n(1 + if).$$

Desta forma,

$$C_m = C_0(1 + i)^n(1 + if).$$

Exemplo 3.4 Fulano investiu R\$ 1 mil à taxa de 10% a.a. pelo prazo de 30 meses. Calcule o montante resgatado utilizando a Convenção Linear para prazos fracionários.

Observe que $n = 2$ e $f = 0,5$. Logo, $C_2 = 1.000(1 + 0,1)^2$ e $C_{2,5} = C_2(1 + 0,1 \times 0,5)$. Podemos então concluir que

$$C_{2,5} = 1.000 \times 1,1^2 \times 1,05 \implies C_{2,5} = 1.270,50.$$

Ou seja, o montante resgatado será igual a R\$ 1.270,50.

3.2.2 A Convenção Exponencial

Na Convenção Exponencial, o Regime de Juros Compostos também é utilizado para a parte fracionária do prazo.

Figura 3.5

Desta forma,

$$C_m = C_n(1 + i)^f. \quad (3.2)$$

Assim sendo,

$$C_m = C_0(1 + i)^n(1 + i)^f = C_0(1 + i)^{n+f} \implies C_m = C_0(1 + i)^m.$$

Ou seja, a Convenção Exponencial envolve tão somente a aplicação direta da expressão (3.1).

Exemplo 3.5 Considere o Exemplo 3.4. Calcule o montante resgatado utilizando a Convenção Exponencial para prazos fracionários.

É possível aplicar diretamente a expressão (3.1). Alternativamente, é possível utilizar o fato de que $C_2 = 1.000 \times 1,1^2$ e aplicar a igualdade (3.2). Nesse caso,

$$C_{2,5} = 1.000 \times 1,1^2 \times (1 + 0,1)^{0,5} = 1.000 \times 1,1^{2,5} \implies C_{2,5} = 1.269,06.$$

Logo, o montante resgatado será igual a R\$ 1.269,06.

- É possível mostrar que, para $i \neq 0$, a Convenção Linear sempre leva a um montante maior do que o da Convenção Exponencial.
- A Convenção Linear era particularmente popular antes da disseminação das calculadoras.
 - Os valores de $(1 + i)^n$ eram disponibilizados para valores inteiros de n em tabelas.
- As duas convenções estão disponíveis na HP 12C, sendo que o padrão (*default*) é a Convenção Linear.

3.3 Valor Futuro e Valor Atual

Conceitos idênticos aos adotados no Regime de Juros Simples. O mesmo comentário vale para *Valor Nominal*, *Valor de Face* e *Valor Presente*.

3.4 A Divisibilidade do Prazo no Regime de Juros Compostos

- De Faro (2006) usa a expressão *indivisibilidade*.

Suponha que Fulano invista R\$ 1.000,00 pelo prazo de 5 anos à taxa de 10% a.a. O valor resgatado será igual a R\$ 1.610,51. Assuma agora que ele aplica a mesma quantia, também a 10% a.a., por 2 anos, efetua o resgate e reinveste o valor resgatado pelo prazo de 3 anos à mesma taxa de juros. Mais uma vez, o valor resgatado será igual a R\$ 1.610,51.

Figura 3.6

Consideraremos agora o caso geral, o qual é ilustrado pelos fluxos de caixa que se seguem.

Figura 3.7

Observe que

$$S_2 = C(1+i)^{n_1+n_2},$$

$$S'_1 = C(1+i)^{n_1}$$

e

$$S'_2 = S'_1(1+i)^{n_2}.$$

Assim sendo,

$$S'_2 = C(1+i)^{n_1}(1+i)^{n_2} \implies S'_2 = C(1+i)^{n_1+n_2}.$$

Desta forma, concluímos que

$$S_2 = S'_2.$$

3.5 Equivalência Financeira

Sejam $a = (a_0, a_1, \dots, a_n)$ e $b = (b_0, b_1, \dots, b_m)$ dois fluxos de caixa. Assim como no Regime de Juros Simples, os fluxos de caixa a e b são *financeiramente equivalentes* na data focal t se os seus valores atuais na data t forem iguais.

O valor atual V_t^a na data t do fluxo de caixa a é dado por

$$V_t^a = \sum_{k=0}^t a_k(1+i)^{t-k} + \sum_{k=t+1}^n \frac{a_k}{(1+i)^{k-t}}. \quad (3.3)$$

A figura que se segue pode ser útil para a compreensão da lógica subjacente à expressão acima.

Figura 3.8

- Certifique-se de que você compreende a referida lógica.

Observe que a expressão (3.3) é equivalente a

$$V_t^a = \sum_{k=0}^n a_k(1+i)^{t-k}. \quad (3.4)$$

Essa última expressão será utilizada repetidamente ao longo deste curso. Evidentemente,

$$V_t^b = \sum_{k=0}^m b_k(1+i)^{t-k}.$$

Por fim, ocorre equivalência financeira na data focal t quando $V_t^a = V_t^b$.

3.6 A Irrelevância da Data Focal no Regime de Juros Compostos

Sejam t e s duas datas e $a = (a_0, a_1, \dots, a_n)$ um fluxo de caixa. Mostraremos que $V_s^a = (1+i)^{s-t}V_t^a$.

- Ideia: se V_t^a é o valor atual na data t , então a multiplicação deste valor atual pelo fator $(1+i)^{s-t}$ tem como resultado justamente o valor atual do mesmo fluxo de caixa na data s .
 - Isto tem que ser provado. Inclusive, resultado similar não se verifica no Regime de Juros Simples.

A prova é bem simples. Primeiramente, observe que V_t^a satisfaz (3.4), ao passo que

$$V_s^a = \sum_{k=0}^n a_k(1+i)^{s-k}.$$

Logo,

$$(1+i)^{s-t}V_t^a = (1+i)^{s-t} \left[\sum_{k=0}^n a_k(1+i)^{t-k} \right] = \sum_{k=0}^n a_k(1+i)^{s-k} = V_s^a.$$

Podemos agora mostrar que se $a = (a_0, a_1, \dots, a_n)$ e $b = (b_0, b_1, \dots, b_m)$ são dois fluxos de caixa financeiramente equivalentes na data t , então eles são financeiramente equivalentes em toda e qualquer data s . De fato,

$$V_t^a = V_t^b \iff (1+i)^{s-t}V_t^a = (1+i)^{s-t}V_t^b \iff V_s^a = V_s^b.$$

- Comentários:
 - Mostramos que as igualdades $V_t^a = V_t^b$ e $V_s^a = V_s^b$ são equivalentes.
 - O mesmo raciocínio permite mostrar que $V_t^a > V_t^b$ se e somente se $V_s^a > V_s^b$.
 - Esses resultados também são válidos para o horizonte infinito.
- Importante: como consequência da irrelevância da data focal, a comparação dos valores atuais de dois (ou mais) fluxos de caixa pode ser feita em uma única data. Comumente, isso é feito na data 0.

Referência

De Faro, Clovis (2006). *Fundamentos da Matemática Financeira: Uma Introdução ao Cálculo Financeiro e à Análise de Investimentos de Risco*. Saraiva.

Figura 3.1



Figura 3.2

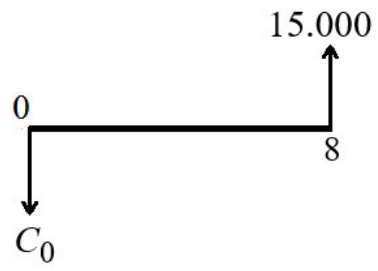


Figura 3.3

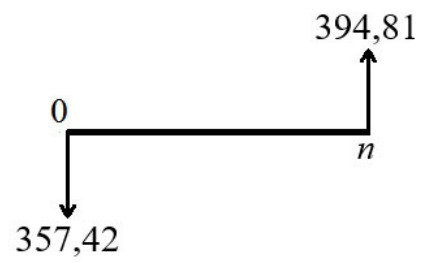


Figura 3.4

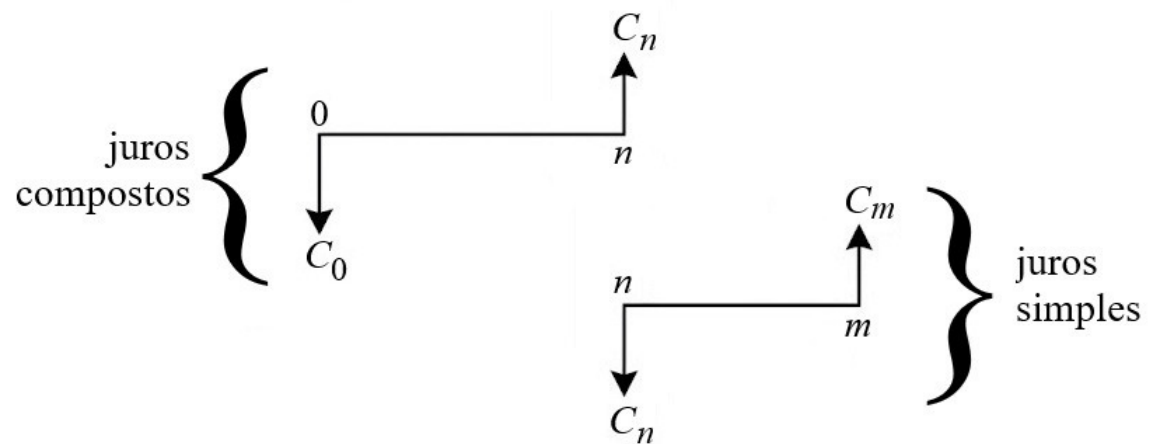


Figura 3.5

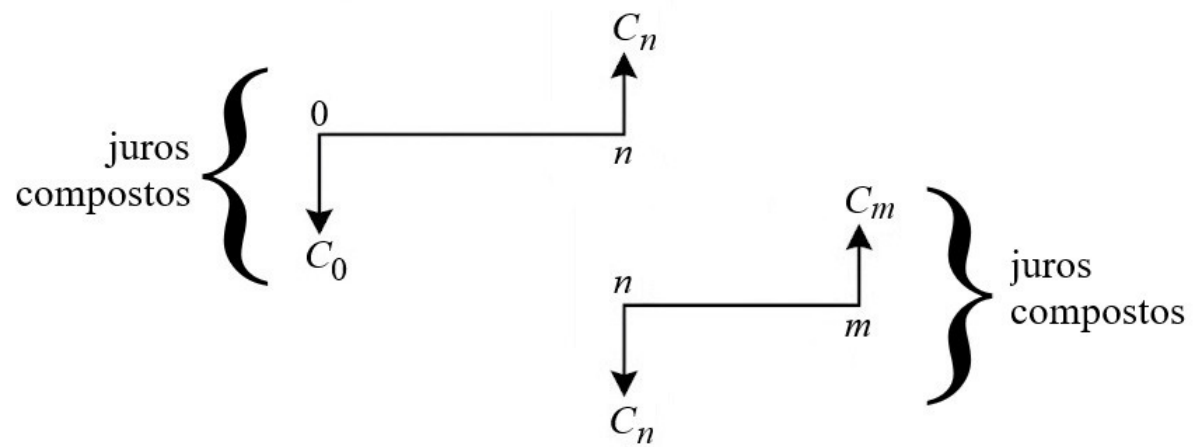


Figura 3.6

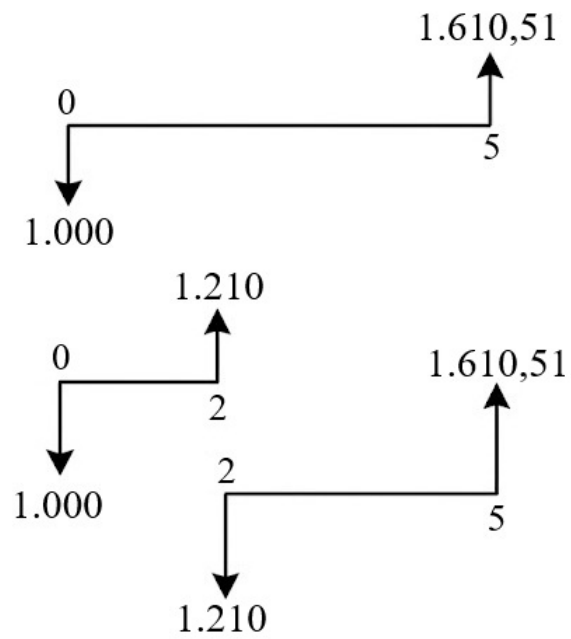


Figura 3.7

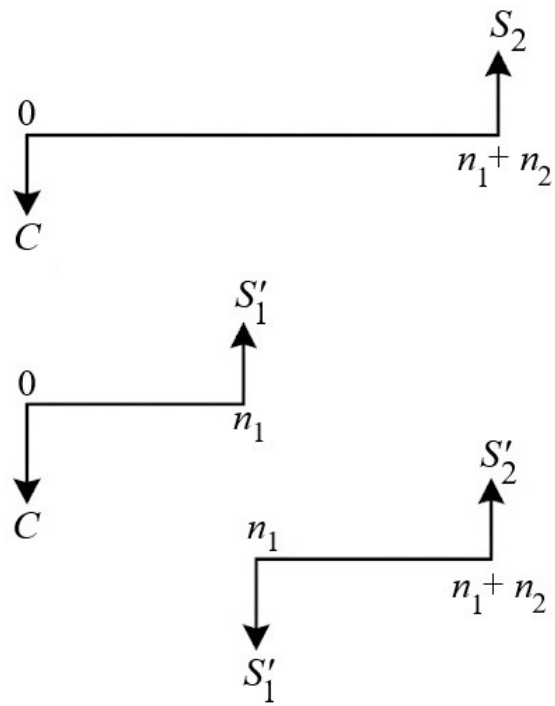


Figura 3.8

