

MATEMÁTICA FINANCEIRA:

NOTAS DE AULA

Alexandre B. Cunha

2 O Regime de Juros Simples

2.1 Introdução

Conforme discutido no Tópico 1, no Regime de Juros Simples os juros e a trajetória do capital são dados por, respectivamente,

$$C_n - C_{n-1} = iC_0$$

e

$$C_n = C_0(1 + in). \quad (2.1)$$

Exemplo 2.1 Fulano investiu R\$ 1.000,00 pelo prazo de 6 meses à taxa de 0,5% a.m. Qual será o valor resgatado?

Figura 2.1

Aplice a expressão (2.1) para concluir que

$$C_6 = 1.000(1 + 0,005 \times 6) = 1.030.$$

Logo, o valor resgatado será igual a R\$ 1.030,00.

- A menos de orientação em contrário, as regras enunciadas a seguir são válidas para esta disciplina.
 - Valores monetários devem ser arredondados para duas decimais e expressos nas respostas finais com duas casas decimais.
 - Taxas de juros (na forma percentual) devem ser arredondadas para quatro decimais. Porém, se não houver perda de precisão, então é possível utilizar menos decimais. Por exemplo, se a taxa de juros for igual a cinco por cento, basta escrever 5% (em vez de 5,0000%) na resposta final.

- o No “mundo real”, regras desse tipo precisam ser levadas em consideração.

Exemplo 2.2 Fulano precisará quitar uma dívida, daqui a três anos, no valor de R\$ 7.250,00. Sabendo que a taxa de juros é de 15% a.a., qual é o valor que ele deve investir hoje, de forma a resgatar justamente o valor da dívida a ser paga?

Figura 2.2

Mais uma vez, aplique a expressão (2.1). Esse procedimento estabelece que

$$7.250 = C_0(1 + 0,15 \times 3) \implies C_0 = 5.000.$$

Assim sendo, Fulano deve investir R\$ 5.000,00.

2.2 Prazos Fracionários

Suponha que alguém pretenda investir C_0 à taxa i , pelo prazo m , sendo que $m = n + f$, $n \in \mathbb{N}$ e $f \in (0, 1)$. Uma possível solução consiste em remunerar o capital investido pela regra básica do regime de juros simples. Ou seja,

$$C_m = C_0 + J_m,$$

onde

$$J_m = J_n + J_f,$$

$$J_n = inC_0$$

e

$$J_f = ifC_0.$$

Desta forma,

$$\begin{aligned} C_m &= C_0 + inC_0 + ifC_0 = C_0[1 + i(n + f)] \\ &\implies C_m = C_0(1 + im). \end{aligned}$$

Logo, sob a hipótese de que durante o prazo fracionário o capital é remunerado pelas regras definidoras do Regime de Juros Simples, basta aplicar a expressão (2.1).

Exemplo 2.3 Aplica-se a quantia de R\$ 250 pelo prazo de 2 anos e 9 meses à taxa de 24% a.a. Qual será o valor resgatado?

Figura 2.3

Observe que $9/12 = 0,75$. Desta forma,

$$C_{2,75} = 250(1 + 0,24 \times 2,75) \implies C_{2,75} = 415.$$

Assim sendo, o valor resgatado será igual a R\$ 415,00.

Suponha que α seja uma constante positiva. Observe que

$$in = \left(\frac{i}{\alpha} \right) (\alpha n).$$

Logo, é possível modificar a unidade de mensuração do tempo e ajustar a taxa de juros de forma proporcional de forma a obter o mesmo montante. A título de ilustração, considere o Exemplo 2.3. O prazo é de 33 meses.

Figura 2.4

Como $24/12 = 2$,

$$C'_{33} = 250(1 + 0,02 \times 33) \implies C'_{33} = 415.$$

Em síntese, no regime de juros simples é possível mudar a unidade em que o tempo é mensurado e ajustar a taxa de juros de forma proporcional sem que isso afete os valores monetários envolvidos.

2.3 Valor Futuro e Valor Atual

Dada uma aplicação qualquer à taxa de juros i_1 pelo prazo n , o seu *valor futuro* (F_n) corresponde ao montante a ser resgatado.

Figura 2.5

Ou seja,

$$F_n = C_0(1 + i_1 n)$$

Isto é, valor futuro é sinônimo de montante.

Sejam $n > 0$ uma data, F_n um valor futuro na referida data e i_2 uma taxa de juros (que pode ser distinta de alguma taxa utilizada na determinação de F_n). Em uma data $s < n$ qualquer, o correspondente *valor atual* na data s (V_s) igual ao referido valor futuro corrigido (ou descontado) pela taxa i_2 .

Figura 2.6

Logo,

$$V_s = \frac{F_n}{1 + i_2(n - s)}.$$

Vale ressaltar que

$$V_0 = C_0 \iff i_1 = i_2.$$

Para chegar a tal conclusão, observe que

$$V_0 = \frac{C_0(1 + i_1n)}{1 + i_2n} \implies C_0(1 + i_1n) = V_0(1 + i_2n).$$

- Suponha que a data zero corresponde ao dia de hoje. Seja s uma data posterior. Paradoxalmente, V_s é um valor atual em uma data futura...
- Frequentemente, a expressão *valor nominal* é usada como equivalente à expressão valor futuro. Muitas vezes, o significado da expressão *valor de face* depende do contexto. Exemplos: (1) título descontado e (2) valor de emissão.
- As expressões *valor atual* e *valor presente* têm o mesmo significado.
- Importante: não há motivo para assumir que as taxas i_1 e i_2 sejam iguais.

2.4 A Indivisibilidade do Prazo no Regime de Juros Simples

- Ao invés de indivisibilidade, de Faro (2006) usa a expressão *incindibilidade*.

Suponha que Fulano invista R\$ 1.000,00 pelo prazo de 5 anos à taxa de 10% a.a. O valor de resgate será igual R\$ 1.500,00. Assuma agora que ele aplica a mesma quantia, também a 10% a.a., por 2 anos, efetua o resgate e reinveste o valor resgatado pelo prazo de 3 anos à mesma taxa de juros. O valor resgatado será igual R\$ 1.560,00.

Figura 2.7

A razão para a diferença é a remuneração dos juros de R\$ 200,00 nos três anos finais na segunda opção.

Consideraremos agora o caso geral, o qual é ilustrado pelos fluxos de caixa que se seguem.

Figura 2.8

Observe que

$$S_2 = C[1 + (n_1 + n_2)i],$$

$$S'_1 = C(1 + n_1i)$$

e

$$S'_2 = S'_1(1 + n_2i).$$

Assim sendo,

$$S'_2 = C[1 + (n_1 + n_2)i + n_1n_2i^2] \implies S'_2 = S_2 + C_0n_1n_2i^2.$$

Concluimos então que a igualdade $S_2 = S'_2$ será válida se e somente se uma das três variáveis n_1 , n_2 , e i for igual a 0.

2.5 Equivalência Financeira

Sejam $a = (a_0, a_1, \dots, a_n)$ e $b = (b_0, b_1, \dots, b_m)$ dois fluxos de caixa. Os fluxos de caixa a e b são *financeiramente equivalentes* na data focal t se os seus valores atuais na data t forem iguais.

- A *data focal* é a data escolhida para comparar os valores atuais.
- Atenção: representação vetorial de um fluxo caixa requer a utilização do sinal “−” nos desembolsos.

Denote os referidos valores atuais por V_t^a e V_t^b . Observe que

$$V_t^a = \sum_{k=0}^t a_k[1 + i(t - k)] + \sum_{k=t+1}^n \frac{a_k}{1 + i(k - t)}.$$

A figura que se segue pode ser útil para a compreensão da lógica subjacente à expressão acima.

- Certifique-se de que você compreende a referida lógica.

Figura 2.9

De forma similar,

$$V_t^b = \sum_{k=0}^t b_k[1 + i(t - k)] + \sum_{k=t+1}^m \frac{b_k}{1 + i(k - t)}.$$

Ocorre equivalência financeira na data focal t quando $V_t^a = V_t^b$.

2.6 A Relevância da Data Focal no Regime de Juros Simples

Considere o fluxo de caixa ilustrado abaixo, onde

$$S = C(1 + in). \quad (2.2)$$

Figura 2.10

- Hipóteses: $C > 0$, $0 < t < n$ e $i \neq 0$.

Seja a o fluxo de caixa dado por $a_0 = C$ e $a_k = 0$ para $k \neq 0$. O fluxo de caixa b é dado por $b_n = S$ e $b_k = 0$ para $k \neq n$. A igualdade (2.2) implica que o valor atual de C na data n é igual a S e que o valor atual de S na data 0 é igual a C . Desta forma, $V_0^a = V_0^b$ e $V_n^a = V_n^b$. Ou seja, os fluxos de caixa a e b são financeiramente equivalentes nas datas focais 0 e n .

Mostraremos a seguir que não há equivalência financeira na data t . Observe que $V_t^a = C(1 + it)$ e $V_t^b = S/[1 + i(n - t)]$. Assim sendo,

$$\begin{aligned} V_t^a = V_t^b &\implies C(1 + it) = \frac{C(1 + in)}{[1 + i(n - t)]} \implies (1 + it)[1 + i(n - t)] = (1 + in) \\ &\implies 1 + i(n - t) + it + i^2t(n - t) = 1 + in \implies i^2t(n - t) = 0. \end{aligned}$$

Como $i^2t(n - t) > 0$, concluímos que $V_t^a \neq V_t^b$.

- Sejam P e Q duas afirmativas. Se P implica Q e Q é falsa, então P também é falsa.

A relevância da data focal decorre da indivisibilidade do prazo. Para chegar a essa conclusão, considere o fluxo de caixa ilustrado na Figura 2.10. Se a aplicação de C à taxa i com resgate na data t , seguido da imediata reaplicação, também à taxa i , até a data n levasse ao montante S , então haveria equivalência na data t .

2.7 Prazos Envolvendo Dias

2.7.1 Juro Exato e Juro Comercial (Ordinário)

O juro exato considera que o ano tem 365 dias (ou 366 no caso de ano bissexto). Adicionalmente, o número de dias de cada mês também é considerado de maneira exata. O juro comercial assume que o ano tem 360 dias e 12 meses de 30 dias.

Exemplo 2.4 Fulano investirá R\$ 300 mil pelo prazo de 42 dias à taxa de juros (simples) de 15% a.a. Qual será o valor resgatado? Seja N o número de dias do ano.

Inicialmente, observe $i = 0,15/N$.

Figura 2.11

Desta forma,

$$S = 300.000(1 + 42i).$$

Logo,

$$N = 360 \implies S = 305.250$$

e

$$N = 365 \implies S = 305.178,08.$$

Concluimos que o valor resgatado será igual a R\$ 305.250,00 com juro exato e a R\$ 305.178,08 com juro comercial.

2.7.2 Contagem de Dias entre Duas Datas

Em muitas aplicações, é preciso contar o número de dias entre duas datas (exemplos: operações com títulos público e utilização de cheque especial).

- Há ferramentas para essa tarefa na HP 12C e no Excel.
 - HP 12C: contagem exata.
 - Excel: contagem exata e contagem de segunda à sexta (por exemplo, é possível utilizar a função DIATRABALHOTOTAL).
 - Certifique-se que você entende como a contagem está sendo feita.
- Contagem de dias úteis: é preciso ser muito cuidadoso.

Exemplo 2.5 No dia 26 de julho de 2025, Fulano depositou R\$ 100 mil em um fundo que rende 0,04% por dia. Sabe-se que ele resgatou os recursos no dia 12 de agosto do mesmo ano. Calcule o montante.

O primeiro passo consiste em calcular o número de dias. Diversas abordagens permitem concluir que $n = 17$ (sim, 17 e não 18).

Figura 2.12

Logo, $S = 100.000(1 + 17 \times 0,0004) = 100.680$. Assim sendo, o valor resgatado será igual a R\$ 100.680,00.

Referência

De Faro, Clovis (2006). *Fundamentos da Matemática Financeira: Uma Introdução ao Cálculo Financeiro e à Análise de Investimentos de Risco*. Saraiva.

Figura 2.1

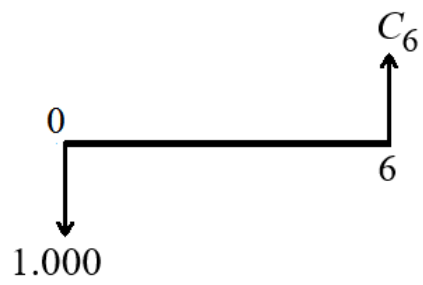


Figura 2.2

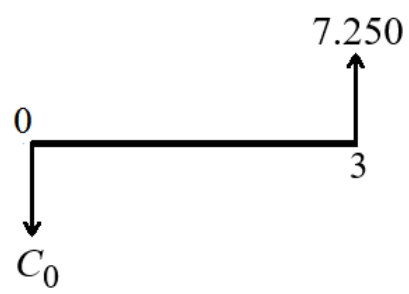


Figura 2.3

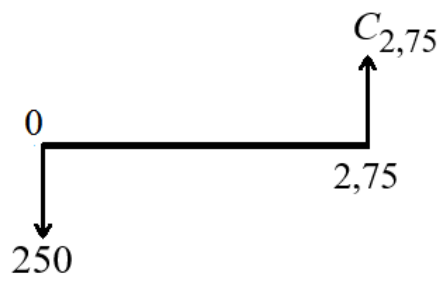


Figura 2.4

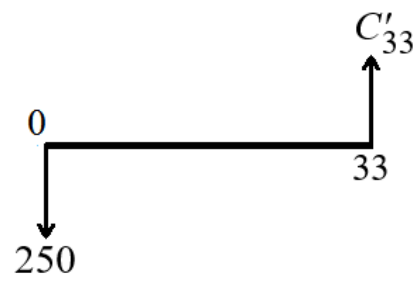


Figura 2.5



Figura 2.6

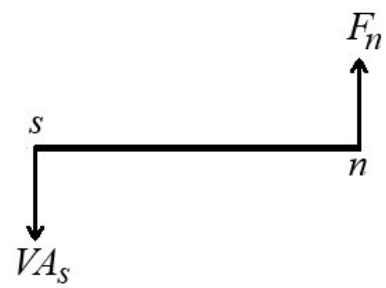


Figura 2.7

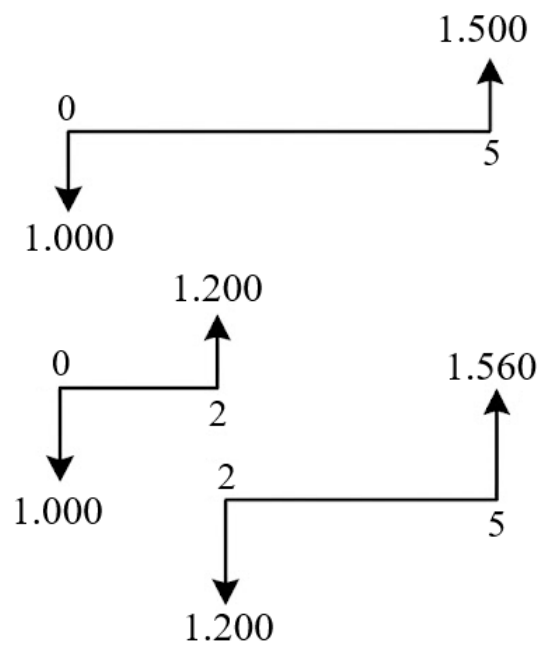


Figura 2.8

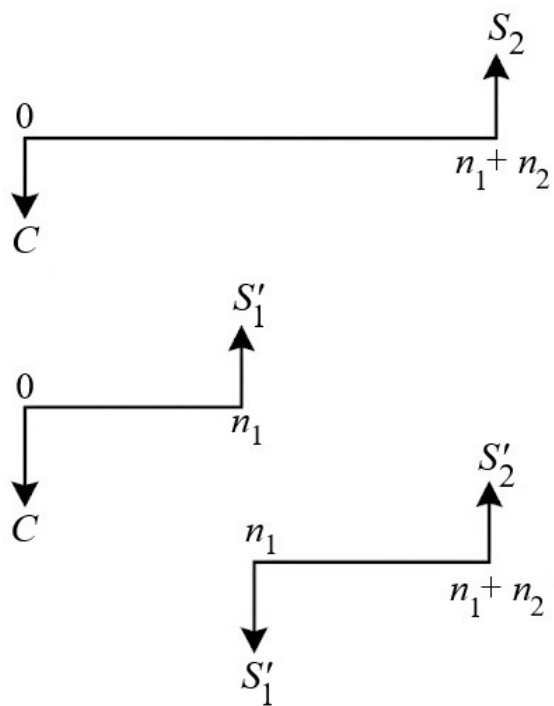


Figura 2.9

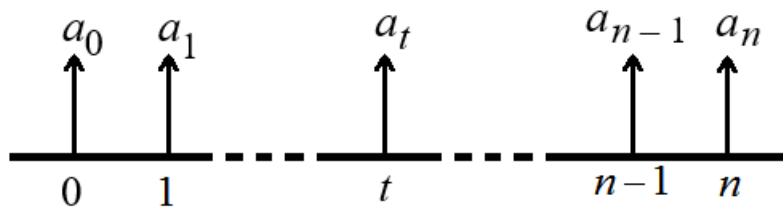


Figura 2.10

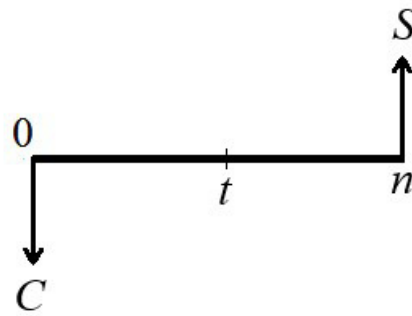


Figura 2.11

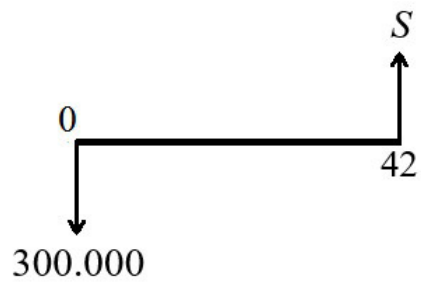


Figura 2.12

