

MATEMÁTICA FINANCEIRA: NOTAS DE AULA

Alexandre B. Cunha

1 Introdução

De acordo com de Faro (2006, p.2), “*juro* é definido como a remuneração, a qualquer título, atribuída ao fator capital”. Segundo Samanez (2010, p. 1), “juro é a remuneração do capital empregado”.

- Controvérsia: *juro* vs. *juros*.
 - *Regime de Juro Composto* ou *Regime de Juros Compostos*?
 - *Taxa de juro* ou *taxa de juros*?
 - Tal controvérsia não existe na língua inglesa (*interest rate*, *interest rates*).
 - Como regra geral, o seu professor usará o plural.

Sejam J os juros, C o capital (inicial) e S o montante. Observe que

$$J = S - C.$$

Um *fluxo de caixa* é uma sucessão (talvez infinita) de pagamentos (desembolsos) e/ou recebimentos. A figura abaixo ilustra graficamente um fluxo de caixa com um desembolso e um recebimento.

Figura 1.1

Uma seta apontada para baixo denota um desembolso, ao passo que uma seta apontada para cima denota um recebimento. A figura que se segue difere da anterior tão somente pela notação.

Figura 1.2

Adotou-se a ótica do investidor/poupador nas Figuras 1.1 e 1.2.

- A representação gráfica do fluxo de caixa terá um papel central nesse curso. Recomenda-se fortemente que desde já o aluno adote a prática de iniciar a resolução de todo e qualquer exercício elaborando a figura em questão.

A *taxa de juros* é a razão entre os juros recebidos e o capital investido. Ela pode ser expressa na forma unitária ou na forma percentual. Dentre outras, a letra i é uma notação usual para a variável em questão.

- Apêndice: símbolos.

Observe que

$$i = \frac{J}{C} \implies i = \frac{C_1 - C_0}{C_0}.$$

Seguindo uma prática comum nos textos de Matemática Financeira, assumiremos nesta disciplina que $i \in [-1, \infty)$.

1.1 O Regime de Juros Simples

Seja $C_0 > 0$ o capital inicial. No regime de juros simples, os juros são dados por

$$C_n - C_{n-1} = iC_0, \quad (1.1)$$

ao passo que a trajetória do capital é dada por

$$C_n = C_0(1 + in). \quad (1.2)$$

Essas duas igualdades são *equivalentes*. Ou seja, (1.1) implica (1.2) e (1.2) implica (1.1).

Mostraremos a seguir que a referida equivalência de fato ocorre. Se (1.2) se verifica, então

$$C_n - C_{n-1} = C_0(1 + in) - C_0[1 + i(n-1)] = C_0\{(1 + in) - [1 + in - i]\} = C_0i.$$

Logo, (1.1) também é satisfeita. Por outro lado, essa expressão implica que

$$\begin{aligned} C_1 - C_0 &= iC_0, \\ C_2 - C_1 &= iC_0, \\ C_3 - C_2 &= iC_0, \\ &\vdots \\ C_{n-1} - C_{n-2} &= iC_0, \\ C_n - C_{n-1} &= iC_0. \end{aligned}$$

Somando membro a membro, concluímos que

$$\sum_{t=1}^n C_t - \sum_{t=0}^{n-1} C_t = niC_0 \implies \left(\sum_{t=1}^{n-1} C_t + C_n \right) - \left(C_0 + \sum_{t=1}^{n-1} C_t \right) = niC_0$$

$$\implies C_n - C_0 = niC_0.$$

Observe que a última igualdade é equivalente a (1.2). Assim sendo, uma das duas expressões (1.1) ou (1.2) é suficiente para caracterizar o regime de juros simples.

A nossa próxima tarefa consiste em representar graficamente a trajetória do capital especificada pela expressão (1.2). Ignore, por um momento, o fato de que o tempo é uma variável discreta. Logo,

$$\frac{dC_n}{dn} = iC_0$$

e

$$\frac{d^2C_n}{dn^2} = 0.$$

Segue-se o gráfico desejado.

Figura 1.3

Observe que se $i < 0$, então em algum momento o capital se tornará negativo.

- O que ocorre em datas que não são inteiras? Isso será discutido com mais detalhes nos Tópicos 2 e 3. Por enquanto: (i) considere as linhas pontilhadas ou (ii) assuma que $C_{n+\alpha} = C_n$, onde $\alpha \in (0, 1)$ (adição de segmentos horizontais no gráfico).

Se a taxa de juros não for constante ao longo do tempo, os juros e a trajetória do capital são dados por, respectivamente,

$$C_n - C_{n-1} = i_n C_0$$

e

$$C_n = C_0 \left(1 + \sum_{t=1}^n i_t \right).$$

- Comentário: “ i_n ou i_{n-1} ”; “ i_t ou i_{t-1} ”? Talvez fizesse mais sentido utilizar i_{n-1} e i_{t-1} . Porém, adotou-se aqui a convenção mais usualmente encontrada nos textos de Matemática Financeira.

1.2 O Regime de Juros Compostos

Mais uma vez, assuma que $C_0 > 0$. Neste contexto, os juros são dados por

$$C_n - C_{n-1} = iC_{n-1}, \quad (1.3)$$

ao passo que a trajetória do capital é dada por

$$C_n = C_0(1+i)^n. \quad (1.4)$$

Assim como no regime de juros simples, há uma equivalência entre as duas igualdades. Assuma que (1.4) se verifica. Logo,

$$C_n - C_{n-1} = C_0(1+i)^{n-1}(1+i) - C_{n-1} = C_{n-1}(1+i) - C_{n-1} = C_{n-1}i.$$

Desta forma, (1.3) também é satisfeita.

Agora, suponha que (1.3) seja verdade. Assim sendo, $C_n = (1+i)C_{n-1}$. Concluimos então que

$$\begin{aligned} C_1 &= (1+i)C_0, \\ C_2 &= (1+i)C_1 = (1+i)(1+i)C_0 = (1+i)^2C_0, \\ C_3 &= (1+i)C_2 = (1+i)(1+i)^2C_0 = (1+i)^3C_0, \\ &\vdots \\ C_{n-1} &= (1+i)C_{n-2} = (1+i)(1+i)^{n-2}C_0 = (1+i)^{n-1}C_0, \\ C_n &= (1+i)C_{n-1} = (1+i)(1+i)^{n-1}C_0 = (1+i)^nC_0. \end{aligned}$$

Aparentemente, a prova está concluída. Porém, não está! Problema: considere a penúltima linha da sucessão acima. Utilizamos a igualdade $C_{n-2} = (1+i)^{n-2}C_0$. Logo, usamos na demonstração justamente aquilo que desejávamos provar. Problema similar ocorre na última linha. Vale ressaltar que o dito problem não ocorre nas linhas iniciais e nem na discussão do Regime de Juros Simples.

Para estabelecer que (1.3) efetivamente implica (1.4), utilizaremos o Princípio da Indução (ver Apêndice). A afirmativa $P(n)$ é a própria igualdade (1.4). Trivialmente, $P(0)$ é verdadeira. Precisamos agora provar que, para $k \geq 0$, $P(k)$ implica $P(k+1)$. Faça $n = k$ em (1.4). Logo,

$$C_k = C_0(1+i)^k. \quad (1.5)$$

Lembre que estamos assumindo que (1.3) se verifica para todo n . Desta forma,

$$C_{k+1} - C_k = iC_k \implies C_{k+1} = (1+i)C_k.$$

Combine a última igualdade com (1.5). Esse procedimento estabelece que

$$C_{k+1} = (1+i)C_0(1+i)^k \implies C_{k+1} = C_0(1+i)^{k+1}.$$

Logo, $P(k+1)$ é verdadeira.

A próxima tarefa consiste em representar graficamente a trajetória do capital especificada pela expressão (1.4). O caso em que $i = -1$ é trivial, pois $C_n = 0$ para todo $n \geq 1$. Se $i = 0$, então $C_n = C_0$ para todo n . Resta considerar os casos em que $i > 0$ e $i \in (-1, 0)$. Vale lembrar que se f é diferenciável e $a > 0$, então

$$y = a^{f(x)} \implies y' = a^{f(x)}(\ln a)f'(x).$$

Mais uma vez, ignore o fato de o tempo ser uma variável discreta. Concluimos que

$$\frac{dC_n}{dn} = C_0(1+i)^n \ln(1+i)$$

Logo, essa derivada é positiva para $i > 0$ e negativa para $i < 0$. Ademais,

$$\frac{d^2C_n}{dn^2} = C_0(1+i)^n [\ln(1+i)]^2 > 0$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = \begin{cases} \infty, & \text{se } i > 0 \\ 0, & \text{se } i < 0 \end{cases}.$$

Segue-se o gráfico desejado.

Figura 1.4

Se a taxa de juros não for constante ao longo do tempo, os juros e trajetória do capital são dados por, respectivamente,

$$C_n - C_{n-1} = i_n C_{n-1}$$

e

$$C_n = C_0 \prod_{t=1}^n (1 + i_t).$$

Comparação dos Regimes

- Não usaremos o argumento “PA e PG com mesma taxa de juros” encontrado em muitos textos.

Ao longo desta seção, C_n^s e C_n^c denotarão os respectivos montantes nos regimes de juros simples e juros compostos. Sejam i^s e i^c as correspondentes taxas. Suponha que $i^s = i^c$ e que ambos os capitais iniciais são iguais a $C_0 > 0$. Nesse caso, $C_0^s = C_0^c$ e

$C_1^s = C_1^c$. Se $i^s = i^c = 0$, então $C_n^s = C_n^c = C_0$ para todo n . Assuma agora que as taxas de juros são distintas de zero. Mostraremos a seguir que $C_n^c > C_n^s$ para todo $n \geq 2$.

Para economizar na notação, denote a taxa de juros comum por i . É possível mostrar que

$$(1+i)^n > 1+ni \quad (1.6)$$

para todo $n \geq 2$. A prova será feita por indução. Como

$$(1+i)^2 = 1+2i+i^2 > 1+2i,$$

a expressão (1.6) é válida para $n = 2$. Suponha agora que ela é verdadeira para $n = k$. Logo,

$$(1+i)^k > 1+ki \implies (1+i)^{k+1} > (1+ki)(1+i) = 1+i+ki+ki^2 > 1+i+ki = 1+(k+1)i.$$

Assim sendo, (1.6) se verifica para $n = k + 1$.

- Resumo do caso “mesma taxa de juros”.
 - Se $i = 0$, então $C_n^s = C_n^c = C_0$ para todo n .
 - Se $i \neq 0$, então $C_0^s = C_0^c$, $C_1^s = C_1^c$ e $C_n^c > C_n^s$ para todo $n \geq 2$.
- A presente questão também pode ser analisada graficamente. Pilares da análise:
 - $C_0^s = C_0^c$ e $C_1^s = C_1^c$;
 - C_n^s é uma função linear e C_n^c é uma função convexa.
 - * Se $h(i) = \ln(1+i)$, então $h'(i) = (1+i)^{-1}$, $h''(i) < 0$, $h(0) = 0$, $h'(0) = 1$.
Logo, $h(i) = i$ para $i = 0$ e $h(i) < i$ para $i \neq 0$.

Suponha agora que $i^s \neq i^c$. Se uma dessas taxas for igual a 0, então o capital correspondente será constante, ao passo que no outro regime o capital variará ao longo do tempo. Assuma agora que ambas as taxas são distintas de 0. Se elas têm sinais diferentes, em um regime o capital crescerá e no outro regime ele decrescerá. Por fim, assuma que i^s e i^c têm o mesmo sinal. Mostraremos que não há como termos o mesmo capital em ambos os regimes em todas as datas. Colocando de outra forma, considere a seguinte pergunta: será que uma taxa de juros simples constante pode produzir a cada data o mesmo montante que uma taxa de juros compostos constante? A resposta é não.

- Sob o ponto de vista teórico, essa é uma pergunta extremamente importante.

Matemática Financeira

Suponha que ambas as taxas i^s e i^c são negativas. Tendo em vista que $C_n^c > 0$ para todo n e $\lim_{n \rightarrow \infty} C_n^s = -\infty$, para algum n suficientemente grande teremos, $C_n^c \neq C_n^s$.

Por fim, considere o caso em que $i^s \neq i^c$, sendo ambas as taxas positivas. Seja $n \geq 1$ uma data qualquer. Assuma que $C_n^c = C_n^s$. Basta mostrar que $C_{n+1}^c > C_{n+1}^s$. Observe que

$$C_n^s = C_0 + ni^s C_0$$

e

$$C_n^c = C_0 + i^c C_0 + i^c C_1^c + \dots + i^c C_{n-1}^c < C_0 + ni^c C_0^c.$$

Logo, se $C_n^c = C_n^s$, então

$$C_0 + ni^c C_n^c > C_0 + ni^s C_0 \implies i^c C_n^c > i^s C_0.$$

Tendo em vista que $C_{n+1}^c = C_n^c + i^c C_n^c$ e $C_{n+1}^s = C_n^s + i^s C_0$, concluímos que $C_{n+1}^c > C_{n+1}^s$.

- Se admitirmos que as taxas de juros podem variar no tempo, então sempre será possível escolher taxas de juros simples que levem, a cada data, ao mesmo capital obtido no regime de juros compostos. Detalhes na última seção do Apêndice.

Apêndice

Símbolos

- Os símbolos $\implies$ e $\iff$ significam, respectivamente, *implica* e *se e somente se*.
- O símbolo $\Leftarrow$ é bem menos comum. Inclusive, o seu professor somente o utiliza em “rascunhos”.
- Exemplo:

$$\circ x > 10 \implies x > 8$$

$$\circ 2x > 0 \iff x > 0$$

- Evidentemente, esses símbolos precisam ser utilizados corretamente. Dois erros comuns: confundir “ $\implies$ ” com “ $\rightarrow$ ” e “ $\iff$ ” com “ $=$ ”.

O Princípio da Indução

Seja n_0 um número inteiro e $P(n)$ uma afirmativa definida para cada inteiro $n \geq n_0$. Suponha que:

- (1) A afirmativa $P(n_0)$ é verdadeira.
- (2) Para todo $k \geq n_0$, $[P(k) \implies P(k+1)]$.

Então $P(n)$ é verdadeira para todo $n \geq n_0$.

Exercício 1. Mostre que $n + 5 < 2^n$ para todo $n \in \{4, 5, 6, \dots\}$. Aplicaremos o Princípio da Indução. Seja $P(n)$ a afirmativa $n + 5 < 2^n$. Como $4 + 5 = 9 < 16 = 2^4$, $P(4)$ é verdadeira. Suponha que, para um k genérico, $P(k)$ se verifique. Logo,

$$k + 5 < 2^k \implies 2k + 10 < 2^{k+1} \implies k + k + 10 < 2^{k+1} \implies k + 6 < 2^{k+1}.$$

Assim sendo, $P(k + 1)$ é verdadeira.

- Comentários:
 - Utilizou-se na última passagem o fato de que $k + 6 < k + k + 10$.
 - Escreva a afirmativa $P(k + 1)$ no seu rascunho, de forma que você saiba aonde deseja chegar.
 - Partindo de $P(k)$, faça alguma operação que o coloque na direção do resultado desejado.
 - Como este exercício é muito simples, também é possível provar de outra maneira (some 1 em cada lado e use o fato de que $1 < 2^k$).

Exercício 2. Sejam q um número real diferente de 1, n um inteiro positivo e $P(n)$ a afirmativa

$$\sum_{i=1}^n q^i = \frac{q - q^{n+1}}{1 - q}. \quad (1.7)$$

Suponha que se deseje provar que $P(n)$ é verdade para todo $n \geq 1$. Evidentemente, não é viável provar individualmente cada uma dessas infinitas afirmativas. Contudo, é suficiente provar que: (i) $P(1)$ está correta e (ii) $[P(k) \implies P(k + 1)]$.

Considere o item (i). Se $n = 1$, então o lado esquerdo de (1.7) é igual a q . Por sua vez, o lado direito é igual a

$$\frac{q - q^2}{1 - q} = q.$$

Logo, $P(1)$ é verdadeira. Com relação ao item (ii), assumamos que (1.7) é verdade para $n = k$. Some q^{k+1} em ambos lados dessa igualdade. Assim sendo,

$$\sum_{i=1}^{k+1} q^i = \frac{q - q^{k+1}}{1 - q} + q^{k+1} = \frac{q - q^{k+1}}{1 - q} + \frac{q^{k+1} - q^{k+2}}{1 - q} \implies \sum_{i=1}^{k+1} q^i = \frac{q - q^{k+2}}{1 - q}.$$

Desta forma, $P(k)$ efetivamente implica $P(k + 1)$.

Comparação dos Regimes: Comentários Adicionais.

Seja $\{i_t^c\}_{t=1}^\infty$ uma sequência de taxas de juros compostas e C_n^c o correspondente montante na data n . Ou seja,

$$C_n^c = C_0 \prod_{t=1}^n (1 + i_t^c).$$

Defina a sequência $\{i_t^s\}_{t=1}^\infty$ de taxas de juros simples da forma recursiva descrita a seguir. Faça $i_1^s = i_1^c$; logo, $C_1^c = C_1^s$. Dadas as taxas $i_1^s, i_2^s, \dots, i_n^s$, selecione i_{n+1}^s de forma que

$$C_0 \left(1 + \sum_{t=1}^n i_t^s \right) + i_{n+1}^s C_0 = C_{n+1}^c.$$

Como o lado esquerdo da última igualdade é igual a C_{n+1}^s , concluímos que $C_n^s = C_n^c$ para todo n .

- O comportamento das taxas de juros simples não foi discutido. Por exemplo, se $i_n^c = i^c > 0$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} i_n^s = \infty$.
 - Razão: para que a igualdade $C_n^s = C_n^c$ se verifique, é preciso que $i_n^s C_0 = i^c C_{n-1}^c$. Como $\lim_{n \rightarrow \infty} C_n^c = \infty$, podemos concluir que $\lim_{n \rightarrow \infty} i_n^s = \infty$.

Referências

- De Faro, Clovis (2006). *Fundamentos da Matemática Financeira: Uma Introdução ao Cálculo Financeiro e à Análise de Investimentos de Risco*. Saraiva.
- Samanez, Carlos Patricio (2010). *Matemática Financeira: Aplicações à Análise de Investimentos*. 5ª edição. Pearson Prentice Hall.

Figura 1.1

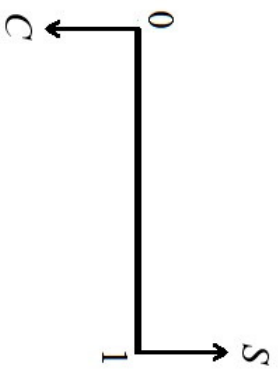


Figura 1.3

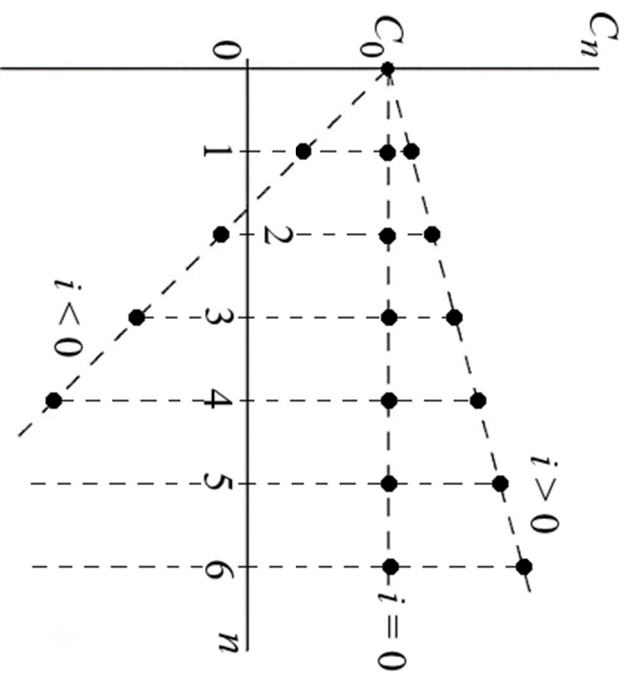


Figura 1.2

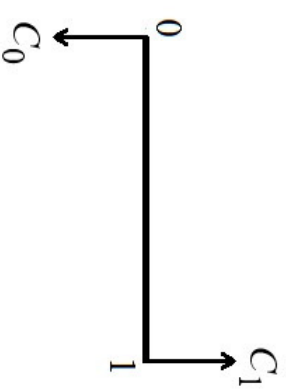


Figura 1.4

