

UFRJ
Matemática Financeira
Professor Alexandre B. Cunha
Lista 6
Gabarito Sintético

1. [completa] Segue-se a representação gráfica do fluxo de caixa em análise.

Figura 1

Como o fluxo de caixa em questão é um investimento simples, sabemos que existe uma única TIR. Dito isto, a TIR precisa satisfazer à igualdade

$$-1.000 + \frac{50}{1+R} + \frac{1.050}{(1+R)^2} = 0.$$

Defina a variável auxiliar x de forma que

$$x = \frac{1}{1+R}.$$

Estamos em busca de soluções positivas da equação $-1.000 + 50x + 1.050x^2 = 0$, a qual é equivalente a

$$21x^2 + x - 20 = 0.$$

Como $\Delta = 1^2 - 4 \times 21 \times (-20) = 1.681$, $\sqrt{\Delta} = 41$. Logo, a única raiz positiva é dada por

$$x = \frac{-1 + 41}{2 \times 21} = \frac{40}{42} = \frac{20}{21}.$$

Assim sendo,

$$\frac{1}{1+R} = \frac{20}{21} \implies 1+R = \frac{21}{20} = 1,05.$$

Desta forma, $R = 5\%$ é a única TIR.

Como $(-1.000, 50, 1.050)$ é um investimento simples, a função valor atual é estritamente decrescente. Podemos então concluir que:

$V(i) > 0$ para $i < 5\%$;

$V(i) = 0$ para $i = 5\%$;

$V(i) < 0$ para $i > 5\%$.

2.

Figura 2

Repita a abordagem adotada no exercício anterior.

$R = 3,7696\%$

$V(i) > 0$ para $i < 3,7696\%$;

$V(i) = 0$ para $i = 3,7696\%$;

$V(i) < 0$ para $i > 3,7696\%$.

3.

Figura 3

Faça $x = (1 + R)^{-6}$. De resto, repita a abordagem adotada nos exercícios anteriores.

$R = 0,3940\%$

$V(i) > 0$ para $i < 0,3940\%$;

$V(i) = 0$ para $i = 0,3940\%$;

$V(i) < 0$ para $i > 0,3940\%$.

4. [completa] Segue-se a representação gráfica do fluxo de caixa em análise.

Figura 4a

A função valor atual é dada por

$$V(i) = -100 + \frac{220}{1+i} - \frac{100}{(1+i)^2}.$$

Logo, uma TIR deve satisfazer à igualdade

$$-100 + \frac{220}{1+R} - \frac{100}{(1+R)^2} = 0.$$

Defina a variável auxiliar x de forma que

$$x = \frac{1}{1+R}.$$

Estamos em busca de soluções positivas da equação $-100 + 220x - 100x^2 = 0$, a qual é equivalente a

$$5x^2 - 11x + 5 = 0.$$

Observe que $\Delta = (-11)^2 - 4 \times 5 \times 5 = 21$. Logo, as raízes são dadas por

$$x = \frac{11 \pm \sqrt{21}}{2 \times 5}.$$

As raízes são dadas por $x_1 = 1,1 + 0,1\sqrt{21}$ e $x_2 = 1,1 - 0,1\sqrt{21}$. Vale ressaltar que como $\sqrt{21} < 11$, ambas são positivas. Logo, há duas TIRs. Elas são dadas por $R_1 = -35,8258\%$ e $R_2 = 55,8258\%$.

Agora, diferencie a função valor atual. Você concluirá que

$$V'(i) = -\frac{220}{(1+i)^2} + \frac{200}{(1+i)^3} \implies V'(i) = \frac{20}{(1+i)^2} \left[\frac{10}{1+i} - 11 \right].$$

A análise da expressão entre colchetes permite concluir que: $V'(i) = 0$ para $i = -1/11$; $V'(i) < 0$ para $i > -1/11$; e $V'(i) > 0$ para $i < -1/11$. Ademais, $R_1 < -1/11 < R_2$. A figura abaixo contém um esboço do gráfico da função valor atual.

Figura 4b

Podemos então concluir que:

$V(i) > 0$ para $R_1 < i < R_2$;

$V(i) = 0$ para $i = R_1$ ou $i = R_2$;

$V(i) < 0$ para $i < R_1$ ou $i > R_2$.

5. [completa] Segue-se a representação gráfica do fluxo de caixa em análise.

Figura 5

Como $a_0 < 0$ e $a_{10} > 0$, existe pelo menos uma TIR. Tendo em vista que há cinco variações de sinal no fluxo de caixa, podem existir até cinco TIRs. Utilize o Excel ou outra ferramenta computacional para elaborar um gráfico da função valor atual. Esse exercício *sugere* (ressalto: *sugere*) que a função valor atual é estritamente decrescente e que existe uma TIR ligeiramente inferior a 10%. Utilize o Excel ou a HP 12C para calcular essa TIR. Você concluirá que $R = 6,4519\%$. Vale ressaltar que o Excel computou a TIR sem que fosse necessário especificar uma conjectura inicial i_0 . No caso da HP 12C, foi preciso especificar $i_0 = 10\%$. Dito isto, tem-se:

$V(i) > 0$ para $i < 6,4519\%$;

$V(i) = 0$ para $i = 6,4519\%$;

$V(i) < 0$ para $i > 6,4519\%$.

Com relação ao uso da expressão “sugere”, observe que a análise gráfica por meio do Excel ou outra ferramenta similar não prova que a função valor atual é estritamente decrescente. Logo, talvez existam outras TIRs. Em geral, o que foi feito até o parágrafo anterior usualmente será considerado satisfatório. De toda forma, neste exercício específico, é possível provar que a TIR é única. Detalhes a seguir.

Seja $p(x)$ o polinômio construído substituindo $(1+i)^{-1}$ por x na função valor atual. Ou seja,

$$p(x) = -10 + x + 2x^2 + 2x^3 - 5x^4 + 3x^5 + 8x^6 - 4x^7 + x^8 + 2x^9 + 5x^{10}.$$

Logo,

$$p'(x) = 1 + 4x + 6x^2 - 20x^3 + 15x^4 + 48x^5 - 28x^6 + 8x^7 + 18x^8 + 50x^9.$$

Observe que é possível reescrever a última igualdade como

$$p'(x) = 1 + 4x + 10x^2 - 20x^3 + 24x^4 + 48x^5 - 28x^6 + 8x^7 + 14x^8 + 50x^9 + 4x^8 - 9x^4 - 4x^2.$$

Observe que $24x^4 = 10x^4 + 14x^4$. Podemos então concluir que

$$p'(x) = y_1 + y_2 + y_3 + y_4,$$

onde

$$y_1 = 10x^4 - 20x^3 + 10x^2 = 10x^2(x^2 - 2x + 1) = 10x^2(x - 1)^2 \geq 0,$$

$$y_2 = 14x^8 - 28x^6 + 14x^4 = 14x^4(x^4 - 2x^2 + 1) = 14x^4(x^2 - 1)^2 \geq 0,$$

$$y_3 = 4x^8 + 8x^7$$

e

$$y_4 = 50x^9 + (48x^5 - 9x^4) + (1 + 4x - 4x^2).$$

O nosso objetivo é mostrar que $p'(x) > 0$. Ambos os termos y_1 e y_2 são não negativos. Ademais, $y_3 > 0$, pois x somente assume valores positivos. Logo, resta analisar o termo y_4 . Reescreva-o da seguinte forma:

$$y_4 = 50x^9 + 1 + 3x^4(16x - 3) + 4x(1 - x).$$

A análise será particionada em três casos: (a) $0 < x < 3/16$, (b) $3/16 \leq x \leq 1$ e (c) $x > 1$.

Considere o caso (a). Em tal contexto, $4x(1 - x) > 0$. Por sua vez, $3x^4 < 0,004$ e $(16x - 3) < 0$. Logo,

$$|3x^4(16x - 3)| = 3x^4(3 - 16x) \leq 3x^4 \times 3 < 0,012.$$

Desta forma, $1 + 3x^4(16x - 3) > 0$. Concluimos então que $y_4 > 0$.

Suponha agora que o caso (b) se verifique. Nesse caso, $16x - 3 \geq 0$ e $1 - x \geq 0$. Mais uma vez, a desigualdade $y_4 > 0$ é satisfeita.

Para concluir, considere o caso (c). Observe que $16x - 3 > 0$. Ademais,

$$y_4 = 1 + 3x^4(16x - 3) + 4x + x^2(50x^7 - 4).$$

Como $50x^7 - 4 > 0$ para $x > 1$, concluimos mais uma vez que $y_4 > 0$.

Concluimos então que $p'(x) > 0$. Logo, $p(x)$ é uma função estritamente crescente. Contudo, isto implica que a função valor atual é estritamente decrescente. Esse último fato implica a unicidade da TIR.

6. [completa] Segue-se a representação gráfica do fluxo de caixa em análise.

Figura 6a

Como $a_0 < 0$ e $a_3 > 0$, existe pelo menos uma TIR. Tendo em vista que há três variações de sinal no fluxo de caixa, podem existir até três TIRs. Utilize o Excel ou outra ferramenta computacional para elaborar um gráfico da função valor atual. Vale ressaltar que muito provavelmente será necessário focar na região em que i está entre 2% e 7% e ajustar a escala vertical para visualizar adequadamente o comportamento da função valor atual. Segue-se o gráfico em questão.

Figura 6b

O gráfico sugere que há três TIRs: a primeira próxima de 3%, a segunda próxima de 5% e a terceira próxima de 6%. Utilize o Excel ou a HP 12C para computá-las. Você concluirá que $R_1 = 3,0928\%$, $R_2 = 5,2632\%$ e $R_3 = 6,3830\%$ (logo, efetivamente existem três TIRs). Observe que o Excel computou R_3 sem que fosse necessário especificar uma conjectura inicial

i_0 . Para computar R_1 e R_2 , foram utilizadas, respectivamente, as conjecturas iniciais 3% e 5%. No caso da HP 12C, R_1 e R_2 foram computadas com as mesmas conjecturas iniciais utilizadas no Excel. Para computar R_3 , fez-se $i_0 = 6\%$. Concluimos então que:

$V(i) > 0$ para $i < R_1$;

$V(i) = 0$ para $i = R_1$;

$V(i) < 0$ para $R_1 < i < R_2$;

$V(i) = 0$ para $i = R_2$;

$V(i) > 0$ para $R_2 < i < R_3$;

$V(i) = 0$ para $i = R_3$;

$V(i) < 0$ para $i > R_3$.

Figura 1

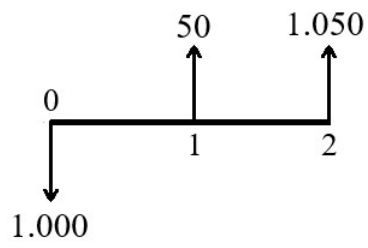


Figura 2

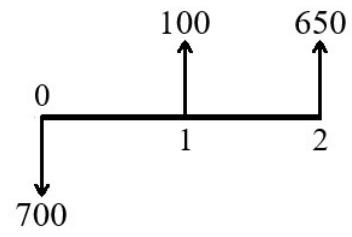


Figura 3

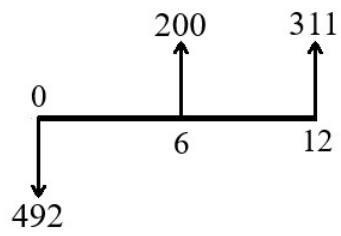


Figura 4a

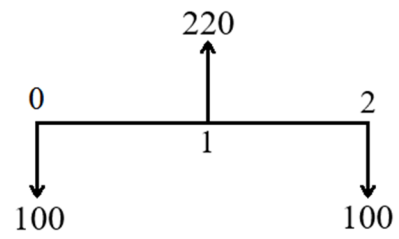


Figura 4b

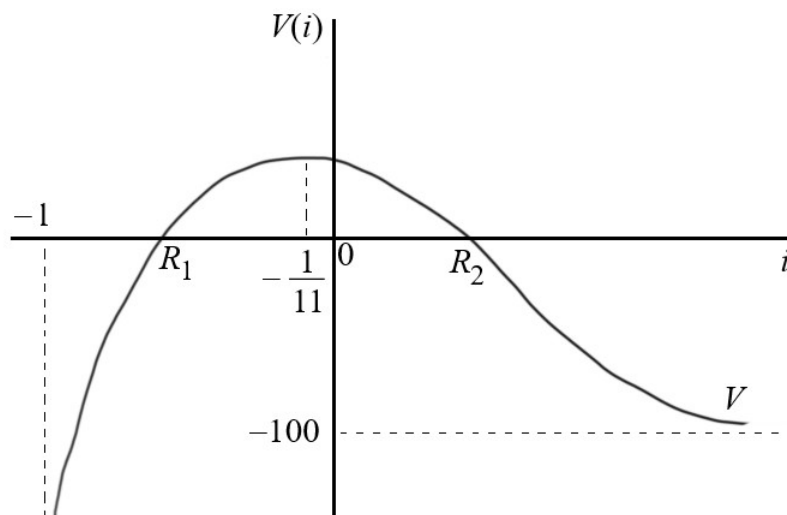


Figura 5

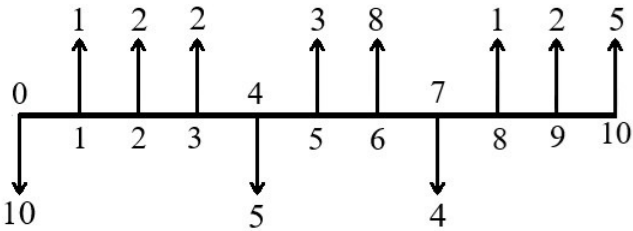


Figura 6.a

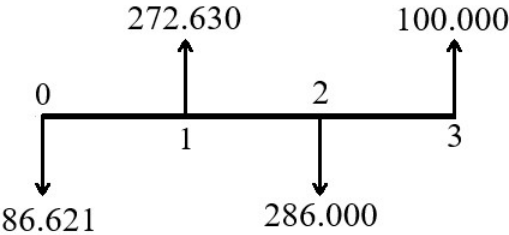


Figura 6.b

