ANÁLISE MATEMÁTICA PARA ECONOMISTAS: NOTAS DE AULA

Elaboração: Alexandre B. Cunha

Introdução: Lógica e Demonstrações

- Considere a seguinte sentença: se f é diferenciável no ponto $\bar{x}$, então f é contínua no ponto $\bar{x}$.
  - *Tradeoff* entre clareza e elegância.
    - Se f é diferenciável no ponto $\bar{x}$, então f é contínua no ponto em questão.
  - Enunciado alternativo.
    - P: f é diferenciável no ponto $\bar{x}$
    - Q: f é contínua no ponto $\bar{x}$
    - $P \implies Q$ Lê-se P implica Q.
      - Exemplo: $x > 10 \implies x > 0$.
  - Atenção: os símbolos " $\implies$ " e "$\to$" possuem significados distintos; é necessário utilizar os símbolos corretos.
- Duas afirmativas R e S são *equivalentes* quando R implica S e S implica R. Em símbolos, $[R \iff S]$.
  - Exemplo: $a - b > 0 \iff a > b$.
  - Se $a > 0$ e $b > 0$, então $ab > 0$. Porém, a implicação oposta não se verifica.
    - *the converse is not true*
- Como provar a veracidade de uma afirmativa do tipo $[P \implies Q]$?
  - Há pelo menos três maneiras.

1. Demonstração direta.
   - $P \implies R_1 \implies R_2 \implies \ldots \implies R_n \implies Q$
   - Evidentemente, podem ocorrer variações. Por exemplo: $P \implies R_1$, $P \implies R_2$ e $[(R_1 \ \& \ R_2) \implies Q]$.
2. Demonstração por contraposição:
   - Utilize a abordagem direta para mostrar que $[\neg Q \implies \neg P]$.
   - Suponha que as afirmativas $[P \implies Q]$ e que $\neg Q$ são verdadeiras. O que podemos dizer sobre $\neg P$? Conclusão: as afirmativas $[P \implies Q]$ e $[\neg Q \implies \neg P]$ são equivalentes.
   - Exemplos: $[x > 2 \implies x > 0]$ e $[x \leq 0 \implies x \leq 2]$; *Alexandre nasceu no Rio de Janeiro implica que Alexandre nasceu no Brasil* e *Alexandre não nasceu no Brasil implica que Alexandre não nasceu no Rio de Janeiro.*
3. Demonstração por contradição (ou absurdo).
   - Assuma que $[P \ \& \ \neg Q]$ é verdade e obtenha uma contradição.
   - Contradição a um fato conhecido ou a alguma conclusão obtida ao longo do seu argumento.
   - Primeiro Teorema do Bem-Estar Social.

Exemplo $[x > 1 \implies x^2 > 1]$.
Prova direta: Como $x > 1$, $x^2 > x$. Combine essas duas desigualdades para concluir que $x^2 > 1$. $\square$

Comentário: o símbolo de Halmos $\square$ denota o fim de uma demonstração (retângulo cheio no livro do Paul Halmos).

Dica: não questione o porquê de cada passo; questione a sua correção.

Prova por contraposição: Assuma que $x^2 \leq 1$; desta forma, $x^2 - 1 \leq 0$. Utilize a última desigualdade para concluir que $(x-1)(x+1) \leq 0$. Assim sendo, $x - 1 \leq 0$ ou $x + 1 \leq 0$. Se a primeira dessas duas desigualdades se verifica, então $x \leq 1$. Por outro lado, se $x + 1 \leq 0$, então $x \leq -1 \leq 1$. $\square$

Comentário: significado de "ou". Inglês: *or* (ou) e *either...or* (ou...ou).

Prova por contradição: Suponha que $x > 1$ e $x^2 \leq 1$. Como $-x < -1$, $x^2 - x < 0$. A última desigualdade implica que $x(x-1) < 0$. Logo, $x < 0$ ou $x < 1$. Contudo, qualquer uma das duas últimas desigualdades contradiz a hipótese de que $x > 1$. $\square$

Comentário: também se poderia afirmar que a expressão $x(x-1) < 0$ contradiz o fato de que o produto de dois números positivos é positivo.

Atenção É preciso utilizar "texto". Compare a prova por contradição com o rascunho que se segue.

$$\begin{array}{rcl} x & > & 1 \\ -x & < & -1 \\ x & < & 0 \end{array} \implies \begin{array}{c} x^2 \leq 1 \\ x^2 - x < 0 \\ x < 1 \end{array} \implies \begin{array}{c} \\ x(x-1) < 0 \\ \text{absurdo!} \end{array}$$

Vale ressaltar que as expressões matemáticas precisam respeitar as regras de pontuação. Considere o exemplo abaixo.

Exemplo Fix π^e. Observe that for all $\pi \neq \pi^*$,

$$\begin{aligned} U(\pi^e, \pi) &= W(\pi^e, \pi) - C \leq W(\pi^e, f(\pi^e)) - C \leq U(\pi^e, f(\pi^e)) \implies \\ U(\pi^e, \pi) &\leq \max\{U(\pi^e, f(\pi^e)), U(\pi^e, \pi^*)\}. \end{aligned} \tag{1}$$

Since $U(\pi^e, \pi^*) \leq \max\{U(\pi^e, f(\pi^e)), U(\pi^e, \pi^*)\}$, (1) holds for all $\pi \in \mathcal{A}$.

Atenção Você não deve decorar o texto utilizado pelo seu professor! Considere a seguinte questão (P2 2021):
Considere a sequência de números reais definida recursivamente por $z_1 = 80$ e

$$z_{n+1} = \frac{1}{4} z_n + 12 \ .$$

Prove que (z_n) é convergente e calcule o seu limite.
Resposta Seja $P(n)$ a afirmativa

$$0 \leq z_{n+1} \leq z_n \leq 80.$$

Utilizaremos o Princípio da Indução para mostrar que ela é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $z_1 = 80$ e $z_2 = 32$, $P(1)$ é verdadeira. Agora, assuma que $P(n)$ se verifique. Logo,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{1}{4} z_{n+1} \leq \frac{1}{4} z_n \leq 20 \implies 12 \leq \frac{1}{4} z_{n+1} + 12 \leq \frac{1}{4} z_n + 12 \leq 32 \implies \\ 12 &\leq z_{n+2} \leq z_{n+1} \leq 32 \implies 0 \leq z_{n+2} \leq z_{n+1} \leq 80. \end{aligned}$$

Tendo em vista que $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$, concluímos que (z_n) é decrescente e limitada. Logo, ela é convergente. Por fim, denote o seu limite por z. Desta forma,

$$z = \frac{1}{4} z + 12 \implies \frac{3}{4} z = 12 \implies z = 16.$$

- A expressão "se e somente se".

- P se e somente se Q significa $[P \iff Q]$.
  * Formulação alternativa: P é necessária e suficiente para Q.
  * Parte "se" (necessidade ou condição necessária): $[Q \implies P]$.
  * Parte "somente se" (suficiência ou condição suficiente): $[P \implies Q]$.
- Inglês: *if and only if* ou *iff* (jargão matemático; Halmos mais uma vez).
- Sugestão: faça a prova de uma afirmativa do tipo "se e somente se" por partes. Primeiro mostre que $[P \implies Q]$ e depois prove $[Q \implies P]$.
- Comentário: uso da expressão "se" (*if*) em definições.

Exercício Considere a equação $x^2 + 1 = 0$. Não há solução (real). Agora, considere o seguinte esboço

$$\begin{aligned} x^2 + 1 &= 0 \\ (x^2 - 1)(x^2 + 1) &= 0 \\ x^4 - 1 &= 0 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Evidentemente, há um problema. Qual é? Dica: " $\iff$ vs. $\implies$ " ao passar da primeira para a segunda linha.a