ANÁLISE MATEMÁTICA PARA ECONOMISTAS: NOTAS DE AULA

Este documento consiste em notas de aula para o Capítulo 1 de Bartle & Sherbert (*Introduction to Real Analysis*. 3ª edição. Nova Iorque: John Wiley & Sons, 2000).

Elaboração: Alexandre B. Cunha

1 Preliminares

Os autores numeram as expressões, por capítulo, na forma (1), (2),... Quando houver uma expressão numerada dessa forma nas notas de aula, então isso significa que a expressão em questão (ou outra bem similar) aparece no livro-texto com o mesmo número. Uma expressão numerada na forma (X.1), (X.2),... ou não aparece no livro ou aparece mas não está numerada. Observe que X corresponde ao número do capítulo em estudo. Essa convenção se aplica para todas as notas de aula para Bartle & Sherbert.

1.1 Conjuntos e Funções

- notação
  - $x \in A$: x pertence a A
  - $x \notin A$: x não pertence a A
  - $A \subseteq B$: A é um subconjunto de B
  - $A \subset B$: A é um subconjunto próprio de B ($A \subseteq B$ e $A \neq B$)

Definição 1.1.1 Os conjuntos A e B são **iguais**, e nós escrevemos $A = B$, se eles contêm os mesmos elementos.

Comentário Uso de "se" (*if*) em definições.

Para estabelecer que A e B são iguais, é suficiente mostrar que $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$. Ou seja,

$$A = B \iff [A \subseteq B \;\; \& \;\; B \subseteq A].$$

Normalmente, um conjunto é definido ou se listando todos os seus elementos ou pela especificação de uma propriedade que determine os elementos do conjunto. Exemplo:

$$A = \{x \in S : P(x)\}.$$

Vale ressaltar que se S estiver claro em um dado contexto, então ele pode ser omitido.

Listam-se a seguir alguns conjuntos importantes.
Números naturais: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$.
Números inteiros: $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \cdots\}$.
Números Racionais: $\mathbb{Q} = \{m/n : m, n \in \mathbb{Z} \text{ e } n \neq 0\}$.
Números reais: $\mathbb{R}$ (será discutido em detalhes no capítulo 2).

Exemplos 1.1.2 **(a)** $\{x \in \mathbb{N} : x^2 - 3x + 2 = 0\} = \{1, 2\}$
(b) $\{2k : k \in \mathbb{N}\}$ (pares), $\{2k - 1 : k \in \mathbb{N}\}$ (ímpares) □

Operações com Conjuntos

Definição 1.1.3 **(a)** A **união** dos conjuntos A e B é o conjunto
$A \cup B = \{x : x \in A \text{ ou } x \in B\}$.
(b) A **interseção** dos conjuntos A e B é o conjunto $A \cap B = \{x : x \in A \text{ e } x \in B\}$.
(c) O **complemento de** B **com relação a** A é o conjunto $A \backslash B = \{x : x \in A \text{ e } x \notin B\}$.

Figura 1.1.1 (p. 3).

Conjunto vazio: $\emptyset$ ($\{\}$ em alguns textos)

Os conjuntos A e B são disjuntos se $A \cap B = \emptyset$.

Teorema 1.1.4 (Leis de DeMorgan) Se A, B e C são conjuntos, então:
(a) $A \backslash (B \cup C) = (A \backslash B) \cap (A \backslash C)$;
(b) $A \backslash (B \cap C) = (A \backslash B) \cup (A \backslash C)$.

Prova do item (a). Mostraremos que $A \backslash (B \cup C) \subseteq (A \backslash B) \cap (A \backslash C)$ e $(A \backslash B) \cap (A \backslash C) \subseteq A \backslash (B \cup C)$. Seja x um elemento qualquer de $A \backslash (B \cup C)$. Logo,

$$\begin{aligned} x &\in A \text{ e } x \notin B \cup C \implies x \in A \text{ e } x \notin B \text{ e } x \notin C \implies \\ (x &\in A \text{ e } x \notin B) \text{ e } (x \in A \text{ e } x \notin C) \implies x \in A \backslash B \text{ e } x \in A \backslash C \implies \\ x &\in (A \backslash B) \cap (A \backslash C). \end{aligned}$$

Assim sendo, $A\backslash(B \cup C) \subseteq (A\backslash B) \cap (A\backslash C)$.

Com relação à outra inclusão, observe que

$$\begin{array}{rcl} x & \in & (A\backslash B) \cap (A\backslash C) \implies x \in A\backslash B \text{ e } x \in A\backslash C \implies \\ (x & \in & A \text{ e } x \notin B) \text{ e } (x \in A \text{ e } x \notin C) \implies x \in A \text{ e } x \notin B \text{ e } x \notin C \implies \\ x & \in & A \text{ e } x \notin B \cup C \implies x \in A\backslash(B \cup C). \end{array}$$

Desta forma, $(A\backslash B) \cap (A\backslash C) \subseteq A\backslash(B \cup C)$. □

Uniões e interseções com famílias de conjuntos Considere a família $\{A_1, A_2, A_3, \cdots\}$.

$$\begin{array}{rcl} \bigcup_{n=1}^{k} A_n & = & \{x : x \in A_n \text{ para algum } n \in \{1, 2, \cdots, k\}\} \\ \bigcap_{n=1}^{k} A_n & = & \{x : x \in A_n \text{ para todo } n \in \{1, 2, \cdots, k\}\} \\ \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n & = & \{x : x \in A_n \text{ para algum } n \in \mathbb{N}\} \\ \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n & = & \{x : x \in A_n \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\} \end{array}$$

Produtos Cartesianos

Definição 1.1.5 Sejam A e B dois conjuntos não vazios. O **produto cartesiano** $A \times B$ de A e B é o conjunto de todos os pares ordenados (a, b) tais que $a \in A$ e $b \in B$. Isto é,

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}.$$

Por exemplo, se $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{1, 5\}$, então

$$A \times B = \{(1, 1), (1, 5), (2, 1), (2, 5), (3, 1), (3, 5)\}.$$

O conjunto $\mathbb{R}^2$ também é um produto cartesiano.

Podemos agora discutir o conceito de *função*. No começo do século 19 a palavra função designava uma fórmula bem definida; por exemplo, $f(x) = x^2 + 3x - 5$. Contudo, os matemáticos desejavam ter um conceito mais geral. Adicionalmente, era necessário fazer uma distinção precisa entre a função propriamente dita e os seus valores. Assim sendo, uma definição alternativa seria a seguinte:

> Uma função f do conjunto A no conjunto B é uma regra de correspondência que atribui a cada elemento x de A um único elemento $f(x)$ em B.

Contudo, há um problema na definição acima: como interpretar a expressão *regra de correspondência*? Dito isto, apresenta-se a seguir uma definição mais precisa do conceito em questão.

Definição 1.1.6 Sejam A e B dois conjuntos. Uma **função** de A em B é um conjunto f de pares ordenados em $A \times B$ com a propriedade que para cada $a \in A$ existe um único $b \in B$ tal que $(a, b) \in f$.

Comentários **(a)** Se (a, b) e (a, b') pertencem a f, então $b = b'$. **(b)** Atenção ao trecho "para cada $a \in A$ "; todo elemento de A...

A título de ilustração, considere os conjuntos $A = \{a_1, a_2\}$ e $B = \{b_1, b_2\}$, onde $a_1 \neq a_2$ e $b_1 \neq b_2$. Assim sendo, $A \times B = \{(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_2, b_1), (a_2, b_2)\}$. O conjunto $f = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2)\}$ é uma função. O conjunto $A \times B$ não é uma função; o mesmo vale para os conjuntos $\{(a_1, b_1), (a_1, b_2)\}$, $\{(a_1, b_2), (a_2, b_1), (a_2, b_2)\}$ e $\{(a_2, b_2)\}$.

O conjunto A é o **domínio** de f e também é denotado for $D(f)$, ao passo que o conjunto B é o **contradomínio** (*codomain* em inglês) de f. O conjunto $R(f)$ de todas as segundas coordenadas dos elementos de f é chamado de **imagem** (*range* ou *image* em inglês). Observe que $D(f) = A$, enquanto pode ocorrer que $R(f) \subset B$. Adicionalmente, $f(a)$ é o **valor** de f no ponto a (ou a **imagem** de a por f). A representação $f : A \to B$ é bastante comum.

Transformações e Máquinas

Figuras 1.1.5 e 1.1.6 (p. 6).

Imagem Direta e Imagem Inversa

Seja $f : A \to B$ uma função.

Definição 1.1.7 Se E é um subconjunto de A, então a **imagem direta** de E por f é o subconjunto $f(E)$ de B dado por

$$f(E) = \{f(x) \in B : x \in E\}.$$

Se H é um subconjunto de B, então a **imagem inversa** de H por f é o subconjunto $f^{-1}(H)$ de A dado por

$$f^{-1}(H) = \{x \in A : f(x) \in H\}.$$

Comentário No contexto dessa definição, f^{-1} não é a função inversa (que pode até não existir).

Exemplos 1.1.8 **(a)** Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Sejam E, G e H os conjuntos dados por $E = \{x : 0 \leq x \leq 2\}$, $G = \{y : 0 \leq y \leq 4\}$ e $H = \{y : -1 \leq y \leq 1\}$. Desta forma, $f(E) = G$; por outro lado, $f^{-1}(G) = \{x : -2 \leq x \leq 2\}$. Assim sendo, $f^{-1}(f(E)) \neq E$. Contudo, $f(f^{-1}(G)) = G$. Ademais, $f^{-1}(H) = \{x : -1 \leq x \leq 1\}$ e $f(f^{-1}(H)) = \{y : 0 \leq y \leq 1\} \neq H$. Convém esboçar um gráfico (identifique os conjuntos E, $f(E)$, $f^{-1}(f(E))$, G, $f^{-1}(G)$, $f(f^{-1}(G))$, H, $f^{-1}(H)$ e $f(f^{-1}(H))$.
(b) Sejam $f : A \to B$ uma função e G e H subconjuntos de B. Mostraremos que $f^{-1}(G \cap H) \subseteq f^{-1}(G) \cap f^{-1}(H)$. Suponha que $x \in f^{-1}(G \cap H)$. Logo, $f(x) \in G \cap H$. Assim sendo, $f(x) \in G$ e $f(x) \in H$, de onde se conclui que $x \in f^{-1}(G)$ e $x \in f^{-1}(H)$. Desta maneira, $x \in f^{-1}(G) \cap f^{-1}(H)$. $\square$

Tipos Especiais de Funções

Definição 1.1.9 Seja $f : A \to B$ uma função.
(a) A função f é dita ser **injetiva** se $x_1 \neq x_2$ implica que $f(x_1) \neq f(x_2)$.
(b) A função f é dita ser **sobrejetiva** se $f(A) = B$; ou seja, se $R(f) = B$.
(c) A função f é dita ser **bijetiva** se ela for injetiva e sobrejetiva.

Para mostrar que uma função f é injetiva, é preciso mostrar que para todo x_1, x_2 em A,

$$f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2.$$

Se A e B são subconjuntos de $\mathbb{R}$ e f é injetiva, então o seu gráfico satisfaz o *primeiro teste da linha horizontal*: toda linha horizontal corta o gráfico de f no máximo uma vez. (Desenhar gráfico.)

Para mostrar que uma função f é sobrejetiva, é preciso mostrar que para todo $b \in B$ existe $x \in A$ tal que $f(x) = b$. Se A e B são subconjuntos de $\mathbb{R}$ e f é sobrejetiva, então o seu gráfico satisfaz o *segundo teste da linha horizontal*: toda linha horizontal corta o gráfico de f pelo menos uma vez. (Desenhar gráfico.)

Exemplo 1.1.10 Considere a função $f : A \to \mathbb{R}$, onde $A = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 1\}$ e $f(x) = 2x/(x-1)$. Mostraremos que f é injetiva. Sejam x_1 e x_2 dois elementos de A tais que $f(x_1) = f(x_2)$. Desta forma,

$$\frac{2x_1}{x_1 - 1} = \frac{2x_2}{x_2 - 1} \implies x_1x_2 - x_1 = x_1x_2 - x_2 \implies x_1 = x_2.$$

Essa função não é sobrejetiva, pois $R(f) \neq \mathbb{R}$. Para verificar tal fato, resolva a equação $y = 2x/(x-1)$ para x. Esse procedimento estabelece que $x = y/(y-2)$. Logo, não existe $x \in A$ tal que $f(x) = 2$. Assim sendo, $2 \notin R(f)$. Adicionalmente, para cada $y \in \mathbb{R}\backslash\{2\}$, existe exatamente um único x tal que $f(x) = y$. Assim sendo, $R(f) = \mathbb{R}\backslash\{2\}$. Por fim, a função $g : A \to \mathbb{R}\backslash\{2\}$, onde $g(x) = f(x)$, é uma bijeção. $\square$

Comentário A função g acima é denotada por f no livro-texto.

Funções Inversas

Definição 1.1.11 Se $f : A \to B$ é uma bijeção, então $g = \{(b, a) \in B \times A : (a, b) \in f\}$ é uma função de B em A. Tal função é denominada a **função inversa** de f e é denotada por f^{-1}.

Comentários **(a)** Observe que $D(f) = R(f^{-1})$, $R(f) = D(f^{-1})$ e $b = f(a)$ se e somente se $a = f^{-1}(b)$. A título de ilustração, considere a função g definida no fim do Exemplo 1.1.10. A sua função inversa é dada por $g^{-1}(y) = y/(y-2)$. **(b)** Mesma notação (f^{-1}) utilizada para função inversa e imagem inversa.

Composição de Funções

Em contextos diversos, desejamos efetuar uma composição de funções. Ou seja, dada um ponto x, avalia-se $f(x)$ e em seguida se avalia o valor de g no ponto $f(x)$. Por exemplo, a curva de oferta de uma firma competitiva é dada pela composição da sua função de produção com a demanda por insumos. Esboço: $Y = F(L)$, $L^D = h(W/P)$ e $Y^S = F(h(W/P))$.

Definição 1.1.12 Sejam $f : A \to B_1$ e $g : B_2 \to C$ são duas funções tais que $R(f) \subseteq B_2$, então a **função composta** $g \circ f$ é a função de A em C definida por $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ para todo $x \in A$.

Comentários **(a)** Definição do livro: $f : A \to B$ e $g : B \to C$; a definição acima é um pouco mais geral. **(b)** A passagem $R(f) \subseteq D(g) = B$ na definição do livro é redundante.

Exemplos 1.1.13 **(a)** A ordem da composição é relevante. Por exemplo, se $f(x) = 2x$ e $g(x) = 3x^2 - 1$, então $(g \circ f)(x) = 12x^2 - 1$ e $(f \circ g)(x) = 6x^2 - 2$. **(b)** Verifique a condição $R(f) \subseteq D(g)$.

Teorema 1.1.14 *Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são duas funções e H um subconjunto de C, então $(g \circ f)^{-1}(H) = f^{-1}(g^{-1}(H))$.*

Prova. Suponha que $a \in (g \circ f)^{-1}(H)$. Logo, $g(f(a)) \in H$. Contudo, isso implica que $f(a) \in g^{-1}(H)$, de onde se conclui que $a \in f^{-1}(g^{-1}(H))$. Desta forma, $(g \circ f)^{-1}(H) \subseteq f^{-1}(g^{-1}(H))$. Assuma agora que $a \in f^{-1}(g^{-1}(H))$. Logo, $f(a) \in g^{-1}(H)$. Entretanto, essa condição implica que $g(f(a)) \in H$, o que tem como consequência $a \in (g \circ f)^{-1}(H)$. Assim sendo, $f^{-1}(g^{-1}(H)) \subseteq (g \circ f)^{-1}(H)$. $\square$

Restrições nos Domínios

- Título original: *Restrictions of Functions.*

Sejam $f : A \to B$ uma função e A_1 um subconjunto próprio de A. Defina $f_1 : A_1 \to B$ de forma que $f_1(x) = f(x)$ para todo $x \in A_1$. A função f_1 é a **restrição de f em A_1**.

Qual é a razão para restringir o domínio? A título de exemplo, considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $f(x) = x^2$. Ela não possui inversa. Todavia, $f_1 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $f_1(x) = x^2$ possui uma inversa.

1.2 Indução Matemática

Axioma 1.2.1 (A Propriedade da Boa Ordenação dos Naturais) Todo subconjunto não vazio de $\mathbb{N}$ tem um elemento mínimo.

Comentário Os autores não usam o "label" axioma. Contudo, eles mencionam que estão assumindo que os naturais possuem a propriedade em questão.

Esse axioma nos permite obter o Teorema 1.2.2 (Princípio da Indução Matemática) e o resultado que se segue.

1.2.3 Princípio da Indução Matemática (segunda versão) Seja n_0 um número natural e $P(n)$ uma afirmativa definida para cada natural $n \geq n_0$. Suponha que:
(1) A afirmativa $P(n_0)$ é verdadeira.
(2) Para todo $k \geq n_0$, $[P(k) \implies P(k+1)]$.
Então $P(n)$ é verdadeira para todo $n \geq n_0$.

Exercício 13 (seção 1.2) Mostre que $n < 2^n$ para todo $n \in \mathbf{N}$. Aplicaremos o Princípio da Indução. Seja $P(n)$ a afirmativa $n < 2^n$. Como $1 < 2^1$, $P(1)$ é verdadeira. Suponha que, para um n genérico, $P(n)$ se verifique. Logo,

$$n < 2^n \implies 2n < 2^{n+1} \implies n + n < 2^{n+1} \implies n + 1 < 2^{n+1}.$$

Assim sendo, $P(n+1)$ é verdadeira. □

Comentário Tentativa fracassada do seu professor: $n < 2^n \implies n+1 < 2^n+1 \implies ?$. Contudo, ele poderia ter usado o fato que $1 < 2^n$ para concluir, pois $2^n + 1 < 2^n + 2^n = 2^n(1+1) = 2^{n+1}$.

- Ver comentários adicionais no fim deste documento.

1.3 Conjunto Finitos e Infinitos

A contagem dos elementos de um conjunto S envolve criar uma bijeção entre S e um subconjunto de $\mathbb{N}$. Se a contagem jamais se encerra, então S é um conjunto infinito. Dentre outras coisas, nesta subseção definiremos conceitos como *conjunto finito* e *conjunto infinito*.

Definição 1.3.1 **(a)** O conjunto vazio $\emptyset$ é dito ter 0 **elementos**.
(b) Um conjunto S é dito ter $n \in \mathbb{N}$ **elementos** se existir uma bijeção entre S e o conjunto $\mathbb{N}_n = \{1, 2, \cdots, n\}$.
(c) Um conjunto S é dito ser **finito** se ele ou é vazio ou tem $n \in \mathbb{N}$ elementos.
(d) Um conjunto S é dito ser **infinito** se ele não é finito.

Comentário Uso de negrito nos items (a) e (b).

Teorema 1.3.2 (Unicidade) Se S é um conjunto finito, então o número de elementos de S é um único numero em $\mathbb{N} \cup \{0\}$.

Comentários (1) Livro: $\mathbb{N}$ ao invés de $\mathbb{N} \cup \{0\}$. (2) A prova decorre do fato que se $n \neq m$, então não se pode criar uma bijeção de $\mathbb{N}_n$ em $\mathbb{N}_m$.

Teorema 1.3.3 O conjunto $\mathbb{N}$ é infinito.

Comentário A prova decorre do fato que se não se pode criar uma bijeção de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{N}_n$.

Teorema 1.3.4 **(a)** Se A é um conjunto com m elementos, B é um conjunto com n elementos e $A \cap B = \emptyset$, então $A \cup B$ tem $m + n$ elementos.
(b) Se A é um conjunto com m elementos e $C \subseteq A$ tem 1 elemento, então $A \backslash C$ tem $m - 1$ elementos.
(c) Se C é um conjunto infinito e B é um conjunto finito, então $C \backslash B$ é um conjunto infinito.

Prova do item (a). Sejam $f : \mathbb{N}_m \to A$ e $g : \mathbb{N}_n \to B$ duas bijeções. Defina $h : \mathbb{N}_{m+n} \to A \cup B$ de forma que

$$h(i) = \begin{cases} f(i), \text{ se } i = 1, \cdots, m, \\ g(i - m), \text{ se } i = m + 1, \cdots, m + n. \end{cases} \tag{1.1}$$

Mostraremos que h é injetiva e sobrejetiva.

Considere inicialmente a primeira propriedade. Sejam i e j dois elementos distintos de $\mathbb{N}_{m+n}$. Se ambos pertencem a $\{1, \cdots, m\}$, então o fato de f ser injetiva implica que $h(i) \neq h(j)$; similarmente, o fato de g ser uma injeção assegura que $h(i) \neq h(j)$ se i e j pertencem a $\{m+1, \cdots, m+n\}$. Suponha agora que $i \in \{1, \cdots, m\}$ e $j \in \{m+1, \cdots, m+n\}$. A definição de h implica que $h(i) \in A$ e $h(j) \in B$. Como $A \cap B = \emptyset$, $h(i) \neq h(j)$. Desta forma, h é uma injeção.

Com relação à segunda propriedade, seja y um elemento qualquer de $A \cup B$. Se $y \in A$, então o fato de f ser sobrejetiva implica que existe $i \in \mathbb{N}_m$ tal que $f(i) = y$. Por sua vez, (1.1) implica que $h(i) = y$. Suponha agora que $y \in B$. Como g é sobrejetiva, $g(j) = y$ para algum $j \in \mathbb{N}_n$. Por fim, (1.1) estabelece que $h(j+m) = y$. □

Teorema 1.3.5 Sejam S e T dois conjuntos tais que $T \subseteq S$.
(a) Se S é finito, então T é finito.
(b) Se T é infinito, então S é infinito.

Prova. Como (a) e (b) são afirmativas contrapositivas, basta estabelecer (a). Se $T = \emptyset$, então não há o que provar. Desta forma, doravante suponha que $T \neq \emptyset$. Seja $P(n)$ a afirmativa *todo subconjunto não vazio de um conjunto S com $n \in \mathbb{N}$ elementos é finito.* Basta estabelecer a sua veracidade para concluir a prova. Para tanto, utilizaremos o Princípio da Indução.

Se $n = 1$, então o único subconjunto não vazio de S é o próprio S. Logo, $T = S$ e T é finito. Assim sendo, $P(1)$ é verdadeira.

Suponha agora que $P(k)$ é verdadeira para um k genérico. Sejam S um conjunto com $k+1$ elementos, $f : \mathbb{N}_{k+1} \to S$ uma bijeção e T um subconjunto de S. Existem duas possibilidades: (i) $f(k+1) \notin T$ e (ii) $f(k+1) \in T$. Assuma que (i) seja verdade. Logo, $T \subseteq S \backslash \{f(k+1)\}$. Pelo item (b) do Teorema 1.3.4, $S \backslash \{f(k+1)\}$ tem k elementos. Como $P(k)$ é verdadeira, T é finito. Considere agora a possibilidade (ii). Nesse caso, podemos afirmar que $T \backslash \{f(k+1)\} \subseteq S \backslash \{f(k+1)\}$, de onde se conclui que $T \backslash \{f(k+1)\}$ é finito – pois $S \backslash \{f(k+1)\}$ tem k elementos e assumimos que $P(k)$ é verdadeira. Como $T = (T \backslash \{f(k+1)\}) \cup \{f(k+1)\}$, um apelo ao item (a) do Teorema 1.3.4 estabelece que T é finito. □

Conjuntos Contáveis

Definição 1.3.6 **(a)** Um conjunto S é **enumerável** se existir uma bijeção de $\mathbb{N}$ em S.
(b) Um conjunto S é **contável** se ele é ou finito ou enumerável.
(c) Um conjunto S é **incontável** se ele não é contável.

Exemplos 1.3.7 **(a)** O conjunto $E = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$ dos números pares é enumerável, pois o mapa $f : \mathbb{N} \to E$ definido por $f(n) = 2n$ é uma bijeção.
(b) O conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros é enumerável. Intuição:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{Z} &= \{0, 1, -1, 2, -2, \cdots\}, \\
\mathbb{N} &= \{1, 2, 3, 4, 5, \cdots\}.
\end{aligned}
$$

De fato, a função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ definida por

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2}, \text{ se } n \text{ é par} \\ -\frac{n-1}{2}, \text{ se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

é uma bijeção.
(c) Sejam $A = \{a_1, a_2, a_3, \cdots\}$ *e* $B = \{b_1, b_2, b_3, \cdots\}$ dois conjuntos enumeráveis e disjuntos. O conjunto $A \cup B$ é enumerável. Intuição: $A \cup B = \{a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, \cdots\}$.□

Teorema 1.3.8 O conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável.

Ver Figura 1.3.1 (p. 19).

Teorema 1.3.9 Sejam S e T dois conjuntos tais que $T \subseteq S$.
(a) Se S é contável, então T é contável.
(b) Se T é incontável, então S é incontável.

A prova está disponível no Apêndice B do livro-texto.

Teorema 1.3.10 Seja S um conjunto não vazio. As seguintes afirmativas são equivalentes:
(a) O conjunto S é contável.
(b) Existe uma sobrejeção de $\mathbb{N}$ em S.
(c) Existe uma injeção de S em $\mathbb{N}$.

Comentário O livro não menciona a condição $S \neq \varnothing$. Porém, sem essa condição pelo menos a afirmativa [(a) $\implies$ (b)] é falsa.
Prova. Mostraremos que [(a) $\implies$ (b) $\implies$ (c) $\implies$ (a)]. Considere inicialmente a afirmativa [(a) $\implies$ (b)]. Suponha que S é contável. Se S é finito, então existe uma bijeção h entre algum conjunto $\mathbb{N}_n$ e S. Defina $H : \mathbb{N} \to S$ de forma que

$$H(k) = \begin{cases} h(k) \text{ se } k = 1, \cdots, n, \\ h(n) \text{ se } k > n. \end{cases}$$

Observe que H é uma sobrejeção. Se S é enumerável, então existe uma bijeção $H : \mathbb{N} \to S$, a qual evidentemente é uma sobrejeção de $\mathbb{N} \to S$.

Com relação à afirmativa [(b) $\implies$ (c)], assuma que $H : \mathbb{N} \to S$ é uma sobrejeção. Defina a função $H_1 : S \to \mathbb{N}$ de forma que

$$H_1(s) = \min\{n \in \mathbb{N} : H(n) = s\}.$$

Para concluir que H_1 é uma injeção, observe que se $s, t \in S$ e $H_1(s) = H_1(t) = \bar{n}$, então $H(\bar{n}) = s$ e $H(\bar{n}) = t$. Logo, $s = t$.

Por fim, considere a afirmativa [(c) $\implies$ (a)]. Se $G_1 : S \to \mathbb{N}$ é uma injeção, então $G_2 : S \to G_1(S)$, $G_2(s) = G_1(s)$, é uma bijeção. Como $G_1(S) \subseteq \mathbb{N}$, o item (a) do Teorema 1.3.9 tem como consequência que $G_1(S)$ é contável. Logo, existe uma bijeção G_3 de $G_1(S)$ em um subconjunto T de $\mathbb{N}$. Considere agora a função $G_3 \circ G_2 : S \to T$. Essa função é uma bijeção (ver Exercício 19 da Seção 1.1). Desta forma, S é contável.□

Comentário Um diagrama pode ser útil para a compreensão do último parágrafo da prova.

Teorema 1.3.11 O conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais é enumerável.

Ver Figura 1.3.2 (p. 20).

Teorema 1.3.12 Se A_m é contável para todo $m \in N$, então o conjunto $\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m$ é contável.

Teorema de Cantor 1.3.13 Seja A um conjunto qualquer. Não existe uma sobrejeção de A no conjunto $\mathcal{P}(A)$ de todos os subconjuntos de A.

Comentário O resultado acima implica que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ é incontável.

O Princípio da Indução: Comentários Adicionais

- "Fora do livro".

Sejam q um número real diferente de 1, n um número natural e $P(n)$ a afirmativa

$$\sum_{i=1}^{n} q^i = \frac{q - q^{n+1}}{1 - q}. \tag{1.2}$$

Suponha que se deseje provar que $P(n)$ é verdade para todo n. Evidentemente, não é viável provar individualmente cada uma dessas infinitas afirmativas. Contudo, é suficiente provar que: (i) $P(1)$ está correta e (ii) $[P(n) \implies P(n+1)]$.

Considere o item (i). Se $n = 1$, então o lado esquerdo de (1.2) é igual a q. Por sua vez, o lado direito é igual a

$$\frac{q - q^2}{1 - q} = q.$$

Logo, $P(1)$ é verdadeira. Com relação ao item (ii) assuma que (1.2) é verdade. Some q^{n+1} de ambos lados dessa igualdade. Assim sendo,

$$\sum_{i=1}^{n+1} q^i = \frac{q - q^{n+1}}{1 - q} + q^{n+1} = \frac{q - q^{n+1}}{1 - q} + \frac{q^{n+1} - q^{n+2}}{1 - q} \implies$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} q^i = \frac{q - q^{n+2}}{1 - q}. \tag{1.3}$$

Desta forma, $P(n)$ efetivamente implica $P(n+1)$. □

- Comentários sobre a prova do item (ii):
  - O primeiro passo consiste em escrever a igualdade (1.3) no seu rascunho.
    - Idealmente (ressalto: idealmente), você terá uma noção precisa daquilo que você quer provar.
  - Faça alguma operação que o coloque na direção do resultado desejado.
  - O seu rascunho não faz parte da demonstração.