UFRJ
Análise Matemática para Economistas
Professor Alexandre B. Cunha
Exercícios Resolvidos

Comentários
(1) Uma resposta que se inicia com a expressão **Esboço** é uma resposta incompleta. As demais estão completas. O mesmo comentário vale para um trecho de resposta qualificado como **Esboço**.
(2) Os símbolos $\triangleright$ e $\triangleleft$ denotam, respectivamente, o começo e o fim de uma "dica". Uma "dica" não faz parte da resposta propriamente dita. Contudo, ela conterá informação sobre algo que o seu professor utilizou para resolver o problema ou alguma sugestão sobre como abordá-lo.

1.1

(2) Mostraremos que (i) $A\backslash(B \cap C) \subseteq (A\backslash B) \cup (A\backslash C)$ e (ii) $(A\backslash B) \cup (A\backslash C) \subseteq A\backslash(B \cap C)$. Considere o item (i). Se $x \in A\backslash(B \cap C)$, então $x \in A$ e $x \notin B \cap C$. Porém, a afirmativa $x \notin B \cap C$ é equivalente a $[x \notin B$ ou $x \notin C]$. Logo, pode-se concluir que $[x \in A$ e $x \notin B]$ ou $[x \in A$ e $x \notin C]$. Desta forma, $x \in A\backslash B$ ou $x \in A\backslash C$. Assim sendo, $x \in (A\backslash B) \cup (A\backslash C)$. No tocante ao item (ii), seja x um elemento genérico de $(A\backslash B) \cup (A\backslash C)$. Logo, $[x \in A$ e $x \notin B]$ ou $[x \in A$ e $x \notin C]$. Contudo, isso implica que $x \in A$ e $[x \notin B$ ou $x \notin C]$. Desta forma, $x \in A$ e $x \notin B \cap C$. Por tal motivo, $x \in A\backslash(B \cap C)$.

(15) $\triangleright$ Tendo em vista o enunciado do exercício, a bijeção a ser construída pode ser a mais simples possível. Assim sendo, utilizaremos uma função linear. $\triangleleft$
$\triangleright$ Para se orientar, esboce o gráfico da função a ser construída. $\triangleleft$

Considere a função com domínio em A (e contradomínio contido em $\mathbb{R}$) dada por

$$f(x) = \frac{-a}{b-a} + \frac{1}{b-a}x.$$

Observe que $R(f) \subseteq B$, pois

$$0 = \frac{-a}{b-a} + \frac{1}{b-a}a < \frac{-a}{b-a} + \frac{1}{b-a}x < \frac{-a}{b-a} + \frac{1}{b-a}b = 1.$$

Logo, podemos assumir que o contradomínio de f é igual a B. Resta mostrar que f é (i) injetiva e (ii) sobrejetiva. Como

$$x_1 \neq x_2 \implies \frac{-a}{b-a} + \frac{1}{b-a}x_1 \neq \frac{-a}{b-a} + \frac{1}{b-a}x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2),$$

f é injetiva. No tocante ao item (ii), seja y um elemento qualquer de B. Tendo em vista que

$$y = \frac{-a}{b-a} + \frac{1}{b-a}x \iff x = a + (b-a)y,$$

para todo $\bar{y} \in \mathbb{R}$ existe $\bar{x} \in \mathbb{R}$ tal que $\bar{y}$ e $\bar{x}$ satisfazem à penúltima igualdade. Para concluir, é preciso mostrar que se $\bar{y} \in B$, então $\bar{x} \in A$. Porém,

$$0 < \bar{y} < 1 \implies a = a + (b-a)0 < a + (b-a)\bar{y} < a + (b-a)1 = b \implies a < \bar{x} < b.$$

(17a) Denote o conjunto $f^{-1}(f(E))$ por X. Mostraremos que (i) $E \subseteq X$ e (ii) $X \subseteq E$. Começaremos por (i). Observe que

$$x \in E \implies f(x) \in f(E) \implies x \in f^{-1}(f(E)) = X.$$

Logo, $E \subseteq X$. Com relação ao item (ii), é suficiente mostrar que se $x \notin E$, então $x \notin X$. Suponha que $x_1 \notin E$. Como f é injetiva, não existe $x_2 \in E$ tal que $x_2 \neq x_1$ e $f(x_2) = f(x_1)$. Consequentemente, $f(x_1) \notin f(E)$. Desta forma, $x_1 \notin f^{-1}(f(E))$.

No tocante ao exemplo solicitado, considere a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2$. Ela não é injetiva, pois $g(-3) = g(3)$. Seja E o conjunto $\{2\}$. Observe que $g(E) = \{4\}$ e $g^{-1}(g(E)) = \{-2, 2\} \neq E$.

(17b) Denote o conjunto $f(f^{-1}(H))$ por Y. Mostraremos que (i) $H \subseteq Y$ e (ii) $Y \subseteq H$. Considere inicialmente o item (i). Seja y um elemento qualquer de H. Como f é sobrejetiva, existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$. Evidentemente, $x \in f^{-1}(H)$. Logo, $f(x) \in f(f^{-1}(H))$. Desta forma, $y \in Y$. Considere agora a parte (ii). Seja y um elemento genérico de Y. Logo, y faz parte da imagem de $f^{-1}(H)$. Assim sendo, existe $x \in f^{-1}(H)$ tal que $f(x) = y$. Adicionalmente, $f(x) \in H$. Como $y = f(x)$, $y \in H$.

No tocante ao exemplo solicitado, considere a função g definida no exercício anterior. Ela não é sobrejetiva, pois não existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = -3$. Seja H o conjunto $\{-1, 4\}$. Assim sendo, $f^{-1}(H) = \{-2, 2\}$ e $f(f^{-1}(H)) = \{4\} \neq H$.

(19) Denote a composição $g \circ f$ por h. Mostraremos que (i) h é injetiva e (ii) h é sobrejetiva. Sejam a_1 e a_2 dois elementos distintos de A. Como f é injetiva, $f(a_1) \neq f(a_2)$. Agora, utilize o fato que g também é injetiva para concluir que $h(a_1) = g(f(a_1)) \neq g(f(a_2)) = h(a_2)$. Logo, h é injetiva. Com respeito ao item (ii), seja c um elemento de C. Como g é sobrejetiva, existe $b \in B$ tal que $g(b) = c$. Por outro lado, o fato de que f também é sobrejetiva implica que existe $a \in A$ tal que $f(a) = b$. Tendo em vista que $h(a) = g(f(a)) = c$, conclui-se que h é sobrejetiva.

(21) $\triangleright$ Desenhe um diagrama com os conjuntos A, B, C e H e setas representando as funções envolvidas para se orientar. $\triangleleft$

Inicialmente, observe que

$$(g \circ f)^{-1}(H) = \{a \in A : g(f(a)) \in H\}.$$

Por outro lado,

$$g^{-1}(H) = \{b \in B : g(b) \in H\}. \tag{1}$$

Adicionalmente, se $S \subseteq B$, então

$$f^{-1}(S) = \{a \in A : f(a) \in S\}.$$

Como $g^{-1}(H) \subseteq B$, podemos concluir que

$$f^{-1}(g^{-1}(H)) = \{a \in A : f(a) \in g^{-1}(H)\}.$$

Combine a última igualdade com (1). Esse procedimento estabelece que

$$f^{-1}(g^{-1}(H)) = \{a \in A : f(a) \in \{b \in B : g(b) \in H\}\}. \tag{2}$$

Contudo,

$$f(a) \in \{b \in B : g(b) \in H\} \iff g(f(a)) \in H.$$

Combine a última afirmativa com (2) para concluir que

$$f^{-1}(g^{-1}(H)) = \{a \in A : g(f(a)) \in H\}.$$

1.2

(11) Denote a soma mencionada no enunciado por S_n. Observe que $S_1 = 1$, $S_2 = 4$, $S_3 = 9$, $S_4 = 16$ e $S_5 = 25$. Isso nos leva a seguinte conjectura:

$$S_n = n^2. \tag{3}$$

A igualdade está obviamente correta para $n = 1$. Resta provar que se a conjectura está correta para um n genérico, então S_{n+1} de fato é igual a $(n+1)^2$. Lembre que o natural impar de ordem $n+1$ é igual a $2(n+1) - 1 = 2n + 1$. Some este natural a cada lado da igualdade (3) para concluir que

$$S_{n+1} = S_n + (2n+1) = n^2 + (2n+1) = (n+1)^2,$$

conforme desejávamos demonstrar.

(16) Seja $P(n)$ a afirmativa $[n^2 < 2^n]$. Como $1^2 < 2^1$, $P(1)$ é verdadeira. Adicionalmente, $2^2 \geq 2^2$, $3^2 \geq 2^3$ e $4^2 \geq 2^4$, $P(2)$, $P(3)$ e $P(4)$ são falsas; como $5^2 < 2^5$, $P(5)$ é verdadeira.

Mostraremos agora que

$$n \geq 5 \implies [P(n) \implies P(n+1)].$$

Assuma que $P(n)$ é verdadeira. Assim sendo,

$$\begin{aligned} 2^n &> n^2 \implies 2^{n+1} > 2n^2 = n^2 + n^2 = (n^2 + 2n + 1) + (n^2 - 2n - 1) \implies \\ 2^{n+1} &> (n+1)^2 + (n^2 - 2n - 1) \geq (n+1)^2 + (n^2 - 2n - 8) \implies \\ 2^{n+1} &> (n+1)^2 + (n-4)(n+2). \end{aligned}$$

Como $n \geq 5$, $(n-4)(n+2) > 0$. Logo, $(n+1)^2 + (n-4)(n+2) > (n+1)^2$. Concluímos então que $2^{n+1} > (n+1)^2$.

Desta forma, $P(n)$ é verdadeira para $n = 1$ e todo $n \geq 5$.

1.3

(4) Seja S o conjunto $\{15, 17, 19, 21, ...\}$. Considere a função com domínio em $\mathbb{N}$ (e contradomínio contido em $\mathbb{R}$) dada por

$$f(n) = 2n + 13.$$

Observe que $f(n)$ é um número natural ímpar. Ademais, como $n \geq 1$, $f(n) \geq 15$. Logo, podemos assumir que S é o contradomínio de f. Tendo em vista que

$$n_1 \neq n_2 \implies 2n_1 + 13 \neq 2n_2 + 13 \implies f(n_1) \neq f(n_2),$$

f é injetiva. Como

$$s = 2n + 13 \iff n = \frac{s - 13}{2},$$

para todo $\bar{s} \in S$ existe um número real $\bar{n}$ tal que $\bar{s}$ e $\bar{n}$ satisfazem à penúltima igualdade. Contudo, os fatos de que $\bar{s}$ é um natural ímpar e $\bar{s} \geq 15$ implicam que $s - 13$ é um natural par. Logo, $\frac{s-13}{2} \in \mathbb{N}$; assim sendo, $\bar{n} \in \mathbb{N}$. Podemos então concluir que f é sobrejetiva.

(12) Seja $\mathcal{P}(\mathbb{N}_m)$ o conjunto de todos os subconjuntos de $\mathbb{N}_m$. O exercício 1.3.11 implica que $\mathcal{P}(\mathbb{N}_m)$ é finito. Logo, $\mathcal{P}(\mathbb{N}_m)$ é contável e, como consequência do Teorema 1.3.12, $U_{m=1}^{\infty}\mathcal{P}(\mathbb{N}_m)$ é contável. Suponha agora que a inclusão $\mathcal{F}(\mathbb{N}) \subseteq U_{m=1}^{\infty}\mathcal{P}(\mathbb{N}_m)$ se verifique. Nesse caso, o Teorema 1.3.9.a implica que $\mathcal{F}(\mathbb{N})$ é contável. Assim sendo, resta mostrar que a inclusão em questão é verdadeira. Seja A um elemento qualquer de $\mathcal{F}(\mathbb{N})$. Como A é finito, existe um número natural k tal que $k \geq a$ para todo $a \in A$. Logo, $A \subseteq \mathbb{N}_k$. Desta forma, A é integrante da família $\mathcal{P}(\mathbb{N}_k)$, a qual por sua vez está contida em $U_{m=1}^{\infty}\mathcal{P}(\mathbb{N}_m)$. Assim sendo, $A \in U_{m=1}^{\infty}\mathcal{P}(\mathbb{N}_m)$.

2.2

(2) Observe que

$$|a + b| = |a| + |b| \iff |a + b|^2 = (|a| + |b|)^2.$$

Agora, utilize as propriedades do valor absoluto para concluir que

$$|(a + b)^2| = |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 \iff (a + b)^2 = a^2 + 2|ab| + b^2 \iff$$
$$a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + 2|ab| + b^2 \iff ab = |ab|.$$

Contudo, a definição de valor absoluto implica que $ab = |ab|$ se e somente $ab \geq 0$. Assim sendo,

$$|a + b| = |a| + |b| \iff ab \geq 0.$$

(14) $\triangleright$ Desenhe a linha reta e as vizinhanças e se convença de que $\gamma = \min\{\varepsilon, \delta\}$ no caso da interseção e $\gamma = \max\{\varepsilon, \delta\}$ no caso da união. $\triangleleft$

Assuma, sem perda de generalidade, que $\varepsilon \leq \delta$. Observe que $V_\varepsilon(a) \subseteq V_\delta(a)$, pois se $|x-a| < \varepsilon$, então $|x-a| < \delta$. Logo, $V_\varepsilon(a) \cup V_\delta(a) = V_\delta(a)$ e $V_\varepsilon(a) \cap V_\delta(a) = V_\varepsilon(a)$.

Considere agora o caso da união. Faça $\gamma = \delta$. Isso implica que, conforme solicitado, $V_\varepsilon(a) \cup V_\delta(a) = V_\gamma(a)$. Para o caso da interseção, faça $\gamma = \varepsilon$, de onde se conclui que $V_\varepsilon(a) \cap V_\delta(a) = V_\gamma(a)$.

(15) $\triangleright$ Desenhe a linha reta, marque os pontos a e b e o ponto médio entre eles e se convença de que qualquer $\varepsilon \leq (b-a)/2$ será uma escolha adequada. $\triangleleft$

Assuma, sem perda de generalidade, que $a < b$. Defina $\varepsilon = (b-a)/2$. Observe que

$$\begin{array}{rcl} x & \in & V_\varepsilon(a) \implies |x-a| < \varepsilon \implies x - a < \varepsilon \implies x - a < \dfrac{b-a}{2} \implies \\ x - b & < & \dfrac{b-a}{2} + a - b \implies b - x > b - a - \dfrac{b-a}{2} = \dfrac{b-a}{2} \implies \\ b - x & > & \varepsilon \implies |x-b| > \varepsilon \implies x \notin V_\varepsilon(b) \implies V_\varepsilon(a) \cap V_\varepsilon(b) = \varnothing. \end{array}$$

(16a) **Esboço** Assuma, sem perda de generalidade, que $a \leq b$. Logo, $\min\{a, b\} = a$ e $\max\{a, b\} = b$.

$$\begin{array}{rcl} (a + b + |a-b|) & = & a + b + b - a = 2b \\ (a + b - |a-b|) & = & a + b - b + a = 2a \end{array}$$

(16b) Suponha que

$$\min\{a, b\} < c. \tag{4}$$

Logo, $\min\{\min\{a, b\}, c\} = \min\{a, b\}$. Por outro lado, (4) implica que $a < c$ ou $b < c$. Desta forma, $\min\{a, b, c\}$ não poderá ser igual a c, de onde se conclui que $\min\{a, b, c\} = \min\{a, b\}$. Considere agora caso em que (4) não se verifica. Em tal contexto, $\min\{\min\{a, b\}, c\} = c$. Ademais, $a \geq c$ e $b \geq c$; assim sendo, $\min\{a, b, c\} = c$.

2.3

(5) Seja T o conjunto $\{t \in \mathbb{R} : -t \in S\}$. É preciso mostrar que $\sup T = -s_0$, onde s_0 denota $\inf S$.

Esboço $-s_0$ é cota superior de T:

$$s_0 \leq s,\ \forall s \in S \implies -s_0 \geq -s,\ \forall s \in S \implies -s_0 \geq t,\ \forall t \in T.$$

$-s_0$ é a menor cota superior de T:

$$v < -s_0 \implies s_0 < -v \implies \exists s_v \in S : s_0 \leq s_v < v \implies \exists(-s_v) \in T : -s_v > v$$

(9) Para simplificar a notação, denote $\max\{\sup A, \sup B\}$ por c. Seja x qualquer elemento de $A \cup B$. Se $x \in A$, então $x \leq \sup A \leq c$; se $x \in B$, então $x \leq \sup B \leq c$. Concluímos então que $x \leq c$. Logo, c é uma cota superior de $A \cup B$. Raciocínio similar estabelece que $x \geq \min\{\inf A, \sup B\}$. Assim sendo, $A \cup B$ é um conjunto limitado.

Para encerrar, mostraremos que c é a menor cota superior de $A \cup B$. Sem perda de generalidade, assuma que $\sup A \leq \sup B$. Seja y um número qualquer menor que c. Como $c = \sup B$, então existe $s_y \in B$ tal que $y < s_y$. Como $s_y \in A \cup B$, concluímos que y não é uma cota superior de $A \cup B$. Assim sendo, c é a menor cota superior de $A \cup B$.

(10) $\triangleright\ x \in S_0 \implies x \in S \implies \inf S \leq x \leq \sup S\ \triangleleft$

(11) Inicialmente, observe que $\sup\{s^*, u\} \geq u$ e $\sup\{s^*, u\} \geq s^* \geq s$ para todo $s \in S$. Desta forma, $\sup\{s^*, u\}$ é uma cota superior de $S \cup \{u\}$. Para concluir o exercício, basta mostrar que se y é um número real menor que $\sup\{s^*, u\}$, então y não é uma cota superior de $S \cup \{u\}$. De fato, se $y < \sup\{s^*, u\}$, então $y < s^*$ ou $y < u$. Se a última desigualdade se verifica, então y não é uma cota superior de $S \cup \{u\}$. Por outro lado, se $y < s^*$, então existe $s' \in S$ tal que $y < s'$. Como s' também pertence a $S \cup \{u\}$, conclui-se que y não é uma cota superior de $S \cup \{u\}$.
Obs.: a resposta acima não utiliza a hipótese de que $s^* \in S$.

(12) **Esboço** $P(n)$: um conjunto com n elementos contém o seu supremo. A afirmativa $P(1)$ é trivialmente verdadeira. Utilize o execício anterior para concluir que $[P(n) \implies P(n+1)]$.

2.4

(1) Seja S o conjunto em questão. Claramente, $s \leq 1$ para todo $s \in S$. Logo, 1 é uma cota superior para S. Seja x qualquer número menor do que 1. Basta mostrar que x não é uma cota superior de S. Seja n_x um natural qualquer tal que $n_x > (1-x)^{-1}$. Assim sendo,

$$1 - x > \frac{1}{n_x} \implies 1 - \frac{1}{n_x} > x.$$

(2) $\triangleright$

$$-1 \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{1} \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \leq \frac{1}{1} - \frac{1}{m} \leq 1 \quad \triangleleft$$

Denote $\inf S$ e $\sup S$ por, respectivamente, a e b. Mostraremos que $a = -1$ e $b = 1$. Considere inicialmente o supremo. Observe que

$$1 \geq \frac{1}{n} \geq \frac{1}{n} - \frac{1}{m}.$$

Logo, 1 é uma cota superior de S. Seja x um número real menor que 1. É preciso mostrar que x não é uma cota superior de S. Dado x, escolha $m_x \in \mathbb{N}$ de forma que $m_x > (1-x)^{-1}$. Assim sendo,

$$m_x > \frac{1}{1-x} \implies \frac{1}{m_x} < 1-x \implies x < 1 - \frac{1}{m_x} \in S.$$

No tocante ao ínfimo,

$$1 \geq \frac{1}{m} \implies -1 \leq -\frac{1}{m} \implies -1 \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{m}.$$

Desta forma, -1 é uma cota inferior de S. Resta mostrar que se y é um número real maior que -1, então y não é uma cota inferior de S. Dado y, escolha $n_y \in \mathbb{N}$ de forma que $n_y > (1+y)^{-1}$. Assim sendo,

$$n_y > \frac{1}{1+y} \implies 1+y > \frac{1}{n_y} \implies y > \frac{1}{n_y} - 1 \in S.$$

(5) **Esboço** Faça $S = f(X)$ no Exemplo 2.4.1(a). Logo,

$$a + \sup f(X) = \sup\{a + f(X)\}.$$

Além disso,

$$a + f(X) = \{a + y : y \in f(X)\} = \{a + f(x) : x \in X\} \implies$$
$$\sup\{a + f(X)\} = \sup\{a + f(x) : x \in X\}.$$

Desta forma,

$$a + \sup\{f(x) : x \in X\} = a + \sup f(X) = \sup\{a + f(X)\} = \sup\{a + f(x) : x \in X\}.$$

Com relação à parte referente ao ínfimo, utilize o raciocínio apresentado no livro texto para mostrar que $a + \inf f(X) = \inf\{a + f(X)\}$ e em seguida aplique um argumento similar ao que foi desenvolvido nesta resposta. Outra opção consiste em considerar a função $g(x) = -f(x)$ e aplicar o Exercício 2.3.5 repetidas vezes. Como (i) $-a + \sup g(X) = \sup\{-a + g(X)\}$ (acabamos de provar este ponto), (ii) $g(X) = -f(X)$ e (iii) $\sup g(X) = -\inf f(X)$, podemos concluir que

$$-[a + \inf\{a + f(x) : x \in X\}] = -[a + \inf f(X)] = -a - \inf f(X) = -a + \sup g(X).$$

Ademais,

$$\sup\{-a + g(X)\} = \sup\{-(a + y) : y \in f(X)\} = -\inf\{a + y : y \in f(X)\}.$$

Assim sendo,

$$-[a + \inf\{a + f(x) : x \in X\}] = -\inf\{a + y : y \in f(X)\} = -\inf\{a + f(x) : x \in X\}.$$

(6) Notação: $S = A + B$; $\bar{a} = \sup A$ e $\hat{a} = \inf A$; $\bar{b}$, $\hat{b}$, $\bar{s}$, $\hat{s}$: significado equivalente. Mostraremos que: (i) $\bar{s} = \bar{a} + \bar{b}$ e (ii) $\hat{s} = \hat{a} + \hat{b}$.
Condição (i) Como $a \leq \bar{a}$ para todo $a \in A$ e $b \leq \bar{b}$ para todo $b \in B$, podemos concluir que

$$a + b \leq \bar{a} + \bar{b}, \forall a \in A, \forall b \in B.$$

Logo, $s \leq \bar{a}+\bar{b}$ para todo $s \in S$. Logo, $\bar{a}+\bar{b}$ é uma cota superior de S. Seja x qualquer número menor do que $\bar{a} + \bar{b}$. É preciso mostrar que x não é uma cota superior de S. Como $x < \bar{a} + \bar{b}$, existe um número $\varepsilon > 0$ tal que

$$x < \bar{a} + \bar{b} - 2\varepsilon \implies x < (\bar{a} - \varepsilon) + (\bar{b} - \varepsilon).$$

Tendo em vista que $\bar{a} = \sup A$, existe $a_1 \in A$ tal que $a_1 > \bar{a} - \varepsilon$. Similarmente, existe $b_1 \in B$ tal que $b_1 > \bar{b} - \varepsilon$. Assim sendo,

$$x < a_1 + b_1 \in S.$$

Logo, x não é uma cota superior de S.

Condição (ii) **Esboço** [raciocínio similar ao utilizado para (i)]

$$\hat{a} + \hat{b} \leq a + b, \forall a \in A, \forall b \in B$$

$\hat{a}+\hat{b}$ é cota inferior de S Se $y > \hat{a}+\hat{b}$, então existe $\varepsilon >$ tal que $y > (\hat{a}+\varepsilon)+(\hat{b}+\varepsilon)$. Como $\hat{a}$ e $\hat{b}$ são ínfimos de..., $y > a_2 + b_2 \in S$.

(7) **Esboço**

$$f(x) \leq \sup_t f(t) \;\;\&\;\; g(x) \leq \sup_t g(t) \implies f(x) + g(x) \leq \sup_t f(t) + \sup_t g(t)$$

$$\inf_t f(t) \leq f(x) \;\;\&\;\; \inf_t g(t) \leq g(x) \implies \inf_t f(t) + \inf_t g(t) \leq f(x) + g(x)$$

Exemplo "igualdades": $X = \{x \in R : -1 \leq x \leq 1\}$, $f(x) = g(x) = x$.
Exemplo "desigualdades": $X = \{x \in R : -1 \leq x \leq 1\}$, $f(x) = x$ e $g(x) = -x$.
Obs.: para entender a diferença entre as questões 6 e 7, considere o exemplo "desigualdades". Neste caso, $f(X) = g(X) = X$, $(f + g)(X) = \{0\}$ e $f(X) + g(X) = \{x \in R : -2 \leq x \leq 2\}$.

(11) Seja $(\bar{x}, \bar{y})$ um elemento genérico de $X \times Y$. Observe que

$$h(\bar{x}, \bar{y}) \leq \sup_y h(\bar{x}, y) = F(\bar{x}) \leq \sup_x F(x).$$

Logo, $\sup_x F(x)$ é uma cota superior de h. Como $\sup_{x,y} h(x, y)$ é a menor cota superior de h,

$$\sup_{x,y} h(x, y) \leq \sup_x F(x). \tag{5}$$

Por outro lado,

$$h(\bar{x}, \bar{y}) \leq \sup_{x,y} h(x, y).$$

Assim sendo, $\sup_{x,y} h(x, y)$ é uma cota superior de $\{h(\bar{x}, y) : y \in Y\}$. Tendo em vista que $F(\bar{x})$ é a menor cota superior do conjunto em questão,

$$F(\bar{x}) \leq \sup_{x,y} h(x, y).$$

Desta forma, $\sup_{x,y} h(x, y)$ é uma cota superior de F. Como $\sup_x F(x)$ é a menor cota superior de F,

$$\sup_x F(x) \leq \sup_{x,y} h(x, y).$$

Combine esta desigualdade com (5) para concluir que

$$\sup_x F(x) = \sup_{x,y} h(x, y).$$

Por fim, raciocínio similar estabelece que $\sup_y G(y) = \sup_{x,y} h(x, y)$.

(13) **Esboço** Pela Propriedade de Arquimedes (2.4.3), dado $y > 0$, existe n_y tal que $y^{-1} < n_y$. Utilize o princípio da indução para mostrar que $n < 2^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, $y^{-1} < 2^{n_y}$.

2.5

(7) Para economizar na notação, denote o conjunto $\cap_{n=1}^{\infty} I_n$ por A. Como $0 \in I_n$ para todo n, então $0 \in A$. Seja x um número real diferente de zero. Se $x < 0$, então $x \notin I_1$; logo, $x \notin A$. Se $x > 0$, então existe $n_x \in \mathbb{N}$ tal que $n_x > \frac{1}{x}$. Logo, $\frac{1}{n_x} < x$ e $x \notin I_{n_x}$. Assim sendo, $x \notin A$. Concluímos então que 0 é o único elemento de A. Logo, $A = \{0\}$.

3.1

(5d) $\triangleright$

$$\left| x_n - \frac{1}{2} \right| = \frac{5}{4n^2 + 6} \quad \triangleleft$$

$\triangleright$

$$\frac{5}{4n^2 + 6} < \varepsilon \iff 4n^2 + 6 > \frac{5}{\varepsilon} \impliedby 4n^2 > \frac{5}{\varepsilon} \impliedby n^2 > \frac{5}{4\varepsilon} \impliedby n > \frac{5}{4\varepsilon} \quad \triangleleft$$

Seja $K(\varepsilon)$ o primeiro natural maior que $5/(4\varepsilon)$. Assim sendo,

$$n \geq K(\varepsilon) \implies n > \frac{5}{4\varepsilon} \implies n^2 > \frac{5}{4\varepsilon} \implies 4n^2 > \frac{5}{\varepsilon} \implies 4n^2 + 6 > \frac{5}{\varepsilon} \implies \frac{4n^2 + 6}{5} > \frac{1}{\varepsilon} \implies \left| x_n - \frac{1}{2} \right| = \frac{5}{4n^2 + 6} < \varepsilon.$$

(8) Inicialmente, observe que como $|x_n - 0| = ||x_n| - 0|$, podemos concluir que

$$|x_n - 0| < \varepsilon \iff ||x_n| - 0| < \varepsilon$$

para qualquer ε. Desta forma,

$$[n \geq K(\varepsilon) \implies |x_n - 0| < \varepsilon] \iff [n \geq K(\varepsilon) \implies ||x_n| - 0| < \varepsilon].$$

No tocante ao exemplo, considere a sequência definida por $x_n = (-1)^n$. Claramente, $|x_n| \to 1$, ao passo que (x_n) não converge.

3.2

(7) Não podemos utilizar o Teorema 3.2.3 devido ao fato de não se saber se (b_n) é ou não convergente.
Seja M um real tal que $|b_n| \leq M$ para todo n. Observe que

$$0 \leq |a_n b_n| \leq |a_n| M.$$

Use os Teoremas 3.2.9 e 3.2.3.a para concluir que $\lim(|a_n|M) = 0$. Em seguida, utilize o Teorema 3.2.7 (Teorema do Sanduíche) para mostrar que $\lim |a_n b_n| = 0$. Por fim, utilize o exercício 3.1.8 para concluir que $\lim(a_n b_n) = 0$.

(9) **Esboço**

$$y_n = \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \implies y_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \implies$$

$$0 \leq y_n \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Aplique Teorema 3.2.7 para mostrar que $\lim(y_n) = 0$.

Defina z_n de acordo com

$$z_n = \sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1.$$

Observe que $\sqrt{n} y_n = 1/z_n$ (detalhes abaixo).

$$\begin{aligned}
\sqrt{n} y_n &= \sqrt{n}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = \sqrt{n^2+n} - n = \left(\sqrt{n^2+n} - n\right) \frac{\sqrt{n^2+n} + n}{\sqrt{n^2+n} + n} \implies \\
\sqrt{n} y_n &= \frac{n}{\sqrt{n^2+n} + n} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1} = \frac{1}{z_n}
\end{aligned}$$

Mostra-se a seguir que $\lim(z_n) = 2$. Dado $\varepsilon > 0$, defina $K(\varepsilon)$ como o primeiro natural maior que $(2\varepsilon + \varepsilon^2)^{-1}$. Assim sendo,

$$\begin{aligned} n &\geq K(\varepsilon) \implies n > \frac{1}{2\varepsilon + \varepsilon^2} = \frac{1}{(1+\varepsilon)^2 - 1} \implies \frac{1}{n} < (1+\varepsilon)^2 - 1 \implies \\ 1 &\leq 1 + \frac{1}{n} < (1+\varepsilon)^2 \implies 1 \leq \sqrt{1 + \frac{1}{n}} < 1 + \varepsilon \implies 0 \leq \sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1 < \varepsilon \implies \\ 0 &\leq \sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1 - 2 < \varepsilon \implies 0 \leq z_n - 2 < \varepsilon \implies |z_n - 2| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Aplique o Teorema 3.2.3.b para concluir que

$$\lim(\sqrt{n} y_n) = \frac{1}{\lim(z_n)} = \frac{1}{2}.$$

(14) **Esboço**

$$b^n \leq a^n + b^n \leq 2b^n \implies b \leq (a^n + b^n)^{\frac{1}{n}} \leq 2^{\frac{1}{n}} b$$

O Exemplo 3.1.11(c) implica que

$$\lim \left(2^{\frac{1}{n}}\right) = 1. \tag{6}$$

Aplique os Teoremas 3.2.3.a e 3.2.7 para concluir que $(a^n + b^n)^{\frac{1}{n}} \to b$.

(17) É suficiente mostrar que a sequência (x_n) não possui cota superior. Dado $\varepsilon \in (0, L-1)$, existe $K \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq K$, então

$$\left| L - \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| < \varepsilon.$$

Aplique a desigualdade triangular para concluir que

$$|L| \leq \left| L - \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| + \left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| < \left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| + \varepsilon \implies L < \frac{x_{n+1}}{x_n} + \varepsilon \implies \frac{x_{n+1}}{x_n} > L - \varepsilon.$$

Defina $C = L - \varepsilon$. Como $\varepsilon < L - 1$, $C > 1$. Assim sendo,

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} > C > 1. \tag{7}$$

Utilizaremos o Princípio da Indução para mostrar que

$$x_n \geq x_K C^{n-K} \tag{8}$$

para todo $n \geq K$. A desigualdade em questão é trivialmente satisfeita para $n = K$. Adicionalmente, (7) implica que $x_{n+1} \geq C x_n$. Combine essa desigualdade com (8) para concluir que

$$x_{n+1} \geq C x_K C^{n-K} = x_K C^{n+1-K}.$$

Seja A um número real qualquer. Se $A \leq 0$, então é trivial que A não é uma cota superior de (x_n). Assuma que $A > 0$. Seja n um natural que satisfaz a condição

$$n > \max\left\{\frac{\ln\left[\frac{A}{x_K C^{-K}}\right]}{\ln C}, K\right\}.$$

Assim sendo,

$$\begin{aligned} n &> \frac{\ln\left[\frac{A}{x_K C^{-K}}\right]}{\ln C} \implies n\ln C > \ln\left[\frac{A}{x_K C^{-K}}\right] \implies \\ \ln(C^n) &> \ln\left[\frac{A}{x_K C^{-K}}\right] \implies C^n > \frac{A}{x_K C^{-K}} \implies x_K C^{n-K} > A. \end{aligned}$$

Como $n > K$, podemos combinar a última desigualdade com (8) e para concluir que $x_n > A$. Desta forma, (x_n) não é limitada superiormente.

(18) **Esboço** $\triangleright$ Aplique o Teorema 3.2.11 e o exercício anterior. $\triangleleft$ Notação: (x_n) corresponde à sequência investigada.
(a)

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = a\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 = a\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 \implies \lim\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right) = a < 1 \implies \lim(x_n) = 0$$

(b)

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = b\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 = b\left(\frac{1}{1+1/n}\right) \implies \lim\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right) = b > 1$$

Logo, (x_n) é divergente.
(c)

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{b^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{b^n} = \frac{b}{n+1} \implies \lim\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right) = 0 \implies \lim(x_n) = 0$$

(d)

$$0 \leq x_n = \frac{n}{n} \times \frac{n-1}{n} \times \cdots \times \frac{2}{n} \times \frac{1}{n} \leq 1 \times 1 \times \cdots \times 1 \times \frac{1}{n} = \frac{1}{n}$$

Aplique o Teorema do Sanduíche para concluir que $\lim(x_n) = 0$.

3.3

(1) Seja $P(n)$ a afirmativa

$$0 \leq x_{n+1} \leq x_n \leq 8.$$

Utilizaremos o Princípio da Indução para mostrar que ela é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $x_1 = 8$ e $x_2 = 6$, $P(1)$ é verdadeira. Agora, assuma que $P(n)$ se verifique. Logo,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{1}{2}x_{n+1} \leq \frac{1}{2}x_n \leq 4 \implies 2 \leq \frac{1}{2}x_{n+1} + 2 \leq \frac{1}{2}x_n + 2 \leq 6 \implies \\ 2 &\leq x_{n+2} \leq x_{n+1} \leq 6 \implies 0 \leq x_{n+2} \leq x_{n+1} \leq 8. \end{aligned}$$

Tendo em vista que $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$, concluímos que (x_n) é decrescente e limitada (logo, ela é convergente). Por fim, denote o seu limite por x. Desta forma,

$$x = \frac{1}{2}x + 2 \implies \frac{1}{2}x = 2 \implies x = 4.$$

(2) $\triangleright$ A equação $s^2 - 2s + 1 = 0$ tem uma única raiz, sendo ela igual a 1. $\triangleleft$
Esboço Utilize o Princípio da Indução para mostrar que $x_n > 1$ para todo n. Em seguida, utilize o fato de que $x_n > 0$ para mostrar que $x_{n+1} - x_n \leq 0$ para todo n, detalhes abaixo.

$$x_{n+1} = 2 - \frac{1}{x_n} \iff x_{n+1} - x_n = 2 - \frac{1}{x_n} - x_n \iff x_{n+1} - x_n = -\frac{1}{x_n}(x_n^2 - 2x_n + 1)$$

Desta forma, $1 \leq x_{n+1} \leq x_n \leq x_1$ para todo n. Assim sendo, (x_n) converge para um número $\bar{x} \geq 1$. Por fim, resolva a equação $\bar{x} = 2 - 1/\bar{x}$ para concluir $\bar{x} = 1$.

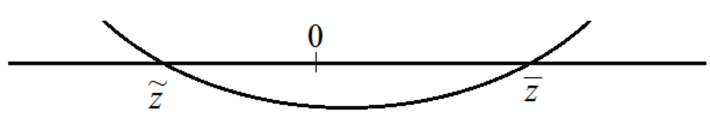
(6) $\triangleright$ Inicialmente, observe que a igualdade $z = \sqrt{a + z}$ é equivalente à equação

$$z^2 - z - a = 0.$$

As raizes dessa equação são

$$\tilde{z} = \frac{1 - \sqrt{1 + 4a}}{2} < 0 \qquad \text{e} \qquad \bar{z} = \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2} > 0.$$

Considere o seguinte gráfico:



Lembre que $z_1 > 0$. Neste momento, o seu professor tem as seguintes conjecturas: se $z_1 = \bar{z}$, então $z_n = \bar{z}$ para todo n (isso é trivialmente verdade); se $z_1 < \bar{z}$, então (z_n) converge para $\bar{z}$ de forma crescente; se $z_1 > \bar{z}$, então (z_n) converge para $\bar{z}$ de forma decrescente. $\triangleleft$

A análise será divida em três casos: (I) $z_1 = \bar{z}$, (II) $0 < z_1 < \bar{z}$ e (III) $z_1 > \bar{z}$.

Caso I Suponha que $z_n = \bar{z}$. Logo,

$$z_n = \sqrt{a + z_n} \implies z_n = z_{n+1}.$$

Desta forma, o Princípio da Indução estabelece que $z_n = \bar{z}$ para todo n. Isso implica que $\lim(z_n) = \bar{z}$.

Caso II Mostraremos que (z_n) é (i) limitada e (ii) crescente. Com relação à afirmativa (i), como $0 < z_1 < \bar{z}$, basta mostrar que

$$0 < z_n < \bar{z} \implies 0 < z_{n+1} < \bar{z}.$$

De fato,

$$0 < z_n < \bar{z} \implies 0 < a + z_n < a + \bar{z} \implies 0 < \sqrt{a + z_n} < \sqrt{a + \bar{z}} \implies 0 < z_{n+1} < \bar{z}.$$

Considere agora a afirmativa (ii). Utilizaremos o Princípio da Indução para estabelecer que $z_n \leq z_{n+1}$. Para mostrar que $z_1 \leq z_2$, é suficiente mostrar que $[z_1 > z_2 \implies z_1 > \bar{z}]$. Observe que

$$z_1 > z_2 \implies z_1 > \sqrt{a + z_1} \implies z_1^2 > a + z_1 \implies z_1^2 - z_1 - a > 0.$$

Como $z_1 > 0$, concluímos que $z_1 > \bar{z}$ ($\triangleright$ ver gráfico antes da resolução $\triangleleft$. Adicionalmente,

$$z_n \leq z_{n+1} \implies a + z_n \leq a + z_{n+1} \implies \sqrt{a + z_n} \leq \sqrt{a + z_{n+1}} \implies z_{n+1} \leq z_{n+2}.$$

Como (z_n) é limitada e crescente, ela possui um limite. Agora, observe que

$$\begin{aligned} z_{n+1} &= \sqrt{a + z_n} \implies z_{n+1}^2 = a + z_n \implies \\ [\lim(z_n)]^2 &= a + \lim(z_n) \implies [\lim(z_n)]^2 - \lim(z_n) - a = 0. \end{aligned}$$

Assim sendo, $\lim(z_n) = \bar{z}$.

Caso III **Esboço** Modifique o raciocínio utilizado no caso anterior para mostrar que (z_n) é limitada e decrescente e que ela converge para $\bar{z}$.
$\triangleright$ Inicialmente, mostre que a sequência é decrescente. Com relação a ela ser limitada, o fato de ela ser decrescente implica que z_1 é uma cota superior para (z_n). Basta então mostrar que $[z_n > \bar{z} \implies z_{n+1} > \bar{z}]$. $\triangleleft$

(7) **Esboço** Mostre que $0 < a \leq x_n$ e $x_n \leq x_{n+1}$ para todo n. Logo, se (x_n) converge, então $\lim(x_n) > 0$. Suponha que (x_n) converge e denote o seu limite por x. Observe que $x^{-1} > 0$. Adicionalmente, $x = x + x^{-1}$, de onde se conclui que $x^{-1} = 0$ (contradição).

(9) Se $u \in S$, então utilize a sequência constante dada por $x_n = u$. Suponha agora que $u \notin S$. Desta forma, para todo $n \in \mathbb{N}$ existe um número $y_n \in S$ tal que

$$u - \frac{1}{n} \leq y_n \leq u. \tag{9}$$

Defina (x_n) recursivamente de forma que $x_1 = y_1$ e $x_n = \max\{y_n, x_{n-1}\}$. Como $x_n \geq x_{n-1}$, (x_n) é crescente. Seja $P(n)$ a afirmativa

$$u - \frac{1}{n} \leq x_n \leq u.$$

Combine o fato de que $x_1 = y_1$ e (9) para concluir que $P(1)$ é verdadeira. Suponha que $P(n)$ seja verdade. Se $x_{n+1} = y_{n+1}$, então (9) implica que $P(n+1)$ se verifica. Suponha agora que $x_{n+1} = x_n$. Observe que $P(n)$ implica que $x_{n+1} \leq u$. Ademais, $x_{n+1} \geq y_{n+1} \geq u - 1/(n+1)$. Desta forma, $P(n+1)$ também se verifica no caso em análise. Combine $P(n)$ com o Teorema do Sanduíche para concluir que $\lim(x_n) = u$. Obs.: não se pode afirmar que (y_n) é crescente.

(12) $\triangleright$

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{n} \quad \triangleleft$$

Esboço Para a "parte monótona", prove que X é crescente por indução ou use o fato de que $x_{n+1} = x_n + (n+1)^{-2}$. Com relação à "parte limitada", lembre que conforme a dica fornecida no livro,

$$\frac{1}{j^2} \leq \frac{1}{j(j-1)} = \frac{1}{j-1} - \frac{1}{j}$$

para $j \geq 2$. Adicionalmente,

$$x_n = 1 + \sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j^2} \leq 1 + \sum_{j=2}^{n} \left(\frac{1}{j-1} - \frac{1}{j}\right)$$

e

$$\sum_{j=2}^{n} \left(\frac{1}{j-1} - \frac{1}{j}\right) = \sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j-1} - \sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j} = 1 + \sum_{j=3}^{n} \frac{1}{j-1} - \sum_{j=2}^{n-1} \frac{1}{j} - \frac{1}{n} =$$
$$1 + \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k} - \sum_{j=2}^{n-1} \frac{1}{j} - \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{n}.$$

Desta forma,

$$x_1 \leq x_n \leq 1 + 1 - \frac{1}{n} \leq 2.$$

3.4

(5) **Esboço** Suponha que $\lim(z_n) = z$. Logo, $\lim(z_{2n-1}) = \lim(z_{2n}) = z$. Assim sendo, $\lim(x_n) = \lim(y_n) = z$. Assuma agora que $\lim(x_n) = \lim(y_n) = z$. Seja ε um

número positivo qualquer. Logo, existe um natural K'_x tal $|x_n - z| < \varepsilon$ para todo $n \geq K'_x$. Por sua vez, seja K_x um natural impar tal que

$$\frac{K_x + 1}{2} \geq K'_x.$$

Vale ressaltar que $(K_x + 1)/2$ é um número natural. Assim sendo,

$$\left[n \geq \frac{K_x + 1}{2} \implies |x_n - z| < \varepsilon\right] \implies [2n - 1 \geq K_x \implies |z_{2n-1} - z| < \varepsilon] .$$

Assim sendo, se $m \geq K_x$ é um natural ímpar, então $|z_m - z| < \varepsilon$. De forma similar, existe um natural par K_y tal que

$$2n \geq K_y \implies |z_{2n} - z| < \varepsilon.$$

Logo, se $m \geq K_y$ é um natural par, então $|z_m - z| < \varepsilon$. Agora, defina $K = \max\{K_x, K_y\}$. Assim sendo, $|z_m - z| < \varepsilon$ para todo $m \geq K$.

(12) $\triangleright$ Lembre que uma sequência é ilimitada se para todo $A \in \mathbb{R}$ existir $n(A) \in \mathbb{N}$ tal que $|x_{n(A)}| > A$. $\triangleleft$
$\triangleright$ Lembre que n_k é um número natural que depende de k. $\triangleleft$
Inicialmente, observe que se uma sequência X é ilimitada, então toda cauda-m da dita sequência também é ilimitada. De fato, dado um natural m, suponha que exista um número real A que seja uma cota superior para $|X_m|$. Logo, $\max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_m|, A\}$ seria uma cota superior para $|X|$, o que contradiz a hipótese de que X é ilimitada.

Como X é ilimitada, existe um natural n_1 tal que $|x_{n_1}| > 1$. Por sua vez, a cauda X_{n_1} também é ilimitada. Logo, existe um natural n_2 tal que $|x_{n_2}| > 2$, sendo que x_{n_2} é um termo da cauda X_{n_1}. De forma similar, existe um termo x_{n_3} da cauda X_{n_2} com a propriedade de que $|x_{n_3}| > 3$. Construa a subsequência (x_{n_k}) desta forma recursiva.

Resta mostrar que $\lim(1/x_{n_k}) = 0$. Dado $\varepsilon > 0$, seja $K(\varepsilon)$ o primeiro natural maior que ε^{-1}. Assim sendo,

$$k \geq K(\varepsilon) \implies |x_{n_k}| > k > \varepsilon^{-1} \implies \left|\frac{1}{x_{n_k}}\right| < \varepsilon \implies \left|\frac{1}{x_{n_k}} - 0\right| < \varepsilon.$$

Desta forma, $\lim(1/x_{n_k}) = 0$.

(14) Seja X a sequência mencionada no enunciado da questão. Seja m um natural qualquer e X_m a correspondente cauda-m. Como X é limitada, X_m também é limitada. Logo, X_m possui um supremo que é menor que ou igual a s (pois s também é uma cota superior de X_m). Adicionalmente, $A = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_m|, \sup X_m\}$ é uma cota superior de X. Como $\max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_m|\} < s$, se $\sup X_m$ fosse menor que s, concluiríamos que A é menor que s, o que contradiz a hipótese de que s é o supremo de X. Assim sendo, $\sup X_m = s$.

Dito isto, seja (y_k) a sequência dada por $y_k = s - 1/k$. Como s é o supremo de X e $y_k < s$ para todo k, existe um termo x_{n_1} tal que $y_1 < x_{n_1} < s$. Por sua vez, s é o supremo de X_{n_1}. Logo, existe um termo x_{n_2} de X_{n_1} tal que $y_2 < x_{n_2} < s$. Argumento similar estabelece que existe um termo x_{n_3} de X_{n_2} tal que $y_3 < x_{n_3} < s$. Construa a subsequência (x_{n_k}) desta forma recursiva.

Resta mostrar que $\lim(x_{n_k}) = s$. Tendo em vista que $\lim(y_k) = s$ e $y_k \leq x_{nk} \leq s$ para todo k, é possível aplicar o Teorema 3.2.7 (sanduíche) para obter o resultado desejado.

3.5

(2a) Inicialmente, observe que se $m > n$, então

$$x_m - x_n = \frac{m+1}{m} - \frac{n+1}{n} = \frac{n-m}{mn} \implies |x_m - x_n| = \frac{m-n}{mn}.$$

Dado ε, seja $H(\varepsilon)$ qualquer número natural maior que ε^{-1}. Logo, para $m > n \geq H(\varepsilon)$,

$$H(\varepsilon) > \frac{1}{\varepsilon} \implies n > \frac{1}{\varepsilon} \implies \frac{1}{n} < \varepsilon \implies \frac{m}{mn} < \varepsilon \implies \frac{m-n}{mn} < \varepsilon.$$

(2b) Os exercícios 14 e 16 da Seção 1.2 implicam que para todo $n \geq 5$,

$$n^2 < n!\ . \tag{10}$$

Para referência futura, mostraremos que, para todo m e n tal que $m > n$,

$$\sum_{j=n+1}^{m} \frac{1}{j^2} \leq \frac{1}{n}. \tag{11}$$

De fato,

$$\frac{1}{j^2} \leq \frac{1}{(j-1)j} = \frac{1}{j-1} - \frac{1}{j}.$$

Desta forma,

$$\sum_{j=n+1}^{m} \frac{1}{j^2} \leq \sum_{j=n+1}^{m} \frac{1}{(j-1)j} = \sum_{j=n+1}^{m} \left[\frac{1}{j-1} - \frac{1}{j}\right] =$$

$$\sum_{j=n+1}^{m} \frac{1}{j-1} - \sum_{j=n+1}^{m} \frac{1}{j} = \sum_{j=n}^{m-1} \frac{1}{j} - \sum_{j=n+1}^{m} \frac{1}{j} = \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \leq \frac{1}{n}.$$

Agora, observe que se $m > n$, então

$$x_m - x_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + ... + \frac{1}{m!}.$$

Combine a última igualdade com (10) para concluir que se $m > n \geq 5$, então

$$|x_m - x_n| \leq \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + ... + \frac{1}{m^2} = \sum_{j=n+1}^{m} \frac{1}{j^2}.$$

Assim sendo, podemos utilizar (10) para afirmar que se $m > n \geq 5$, então

$$|x_m - x_n| \leq \frac{1}{n}. \tag{12}$$

Estamos agora aptos a estabelecer que (x_n) é uma sequência de Cauchy. Dado $\varepsilon > 0$, seja $H(\varepsilon)$ qualquer natural maior que $\max\{\varepsilon^{-1}, 5\}$. Logo,

$$n \geq H(\varepsilon) \implies n > \frac{1}{\varepsilon} \implies \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Assim sendo, se $m > n \geq H(\varepsilon)$, $|x_m - x_n| < \varepsilon$.

(12) **Esboço** Utilize indução para mostrar que $x_n > 0$ para todo n. Agora, observe que

$$|x_{n+2} - x_{n+1}| = \left|\frac{1}{2 + x_{n+1}} - \frac{1}{2 + x_n}\right| = \frac{|x_{n+1} - x_n|}{(2 + x_{n+1})(2 + x_n)} \leq \frac{1}{4}|x_{n+1} - x_n|.$$

Logo, (x_n) é uma contração.