UFRJ Análise Matemática para Economistas P2 2024/0
Professor Alexandre B. Cunha
Resolva 2 (duas) das 3 (três) questões.

(1) Considere a sequência de números reais definida recursivamente por $x_1 = 4$ e

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + 10 \ .$$

Prove que (x_n) é convergente e calcule o seu limite.

(2) Sejam (x_n) e (y_n) duas sequências de números reais tais que $x_n \geq 0$ e $y_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Mostre que se $\lim(x_n) = 0$ e (y_n) é limitada, então $\lim(x_n y_n) = 0$.

(3) Considere o problema de selecionar $\{c_t, k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}$ de forma a maximizar

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(c_t)$$

sujeito à restrição

$$c_t + k_{t+1} - (1-\delta)k_t \leq f(k_t) \ , \ k_0 = \bar{k} \ .$$

Ambas as funções U e f são estritamente crescentes, côncavas, diferenciáveis e satisfazem à condição de Inada. Monte a função de Lagrange e enuncie as condições de primeira ordem. Em seguida, caracterize a solução do problema (a sua caracterização não pode depender do multiplicador de Lagrange).

Respostas

(1) Seja $P(n)$ a afirmativa

$$0 \leq x_n \leq x_{n+1} \leq 20.$$

Utilizaremos o Princípio da Indução para mostrar que ela é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $x_1 = 4$ e $x_2 = 12$, $P(1)$ é verdadeira. Agora, assuma que $P(n)$ se verifique. Logo,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{1}{2}x_n \leq \frac{1}{2}x_{n+1} \leq 10 \Rightarrow 10 \leq \frac{1}{2}x_n + 10 \leq \frac{1}{2}x_{n+1} + 10 \leq 20 \Rightarrow \\ 10 &\leq x_{n+1} \leq x_{n+2} \leq 20 \Rightarrow 0 \leq x_{n+1} \leq x_{n+2} \leq 20. \end{aligned}$$

Tendo em vista que $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$, concluímos que (x_n) é crescente e limitada. Logo, ela é convergente. Por fim, denote o seu limite por x. Desta forma,

$$x = \frac{1}{2}x + 10 \Rightarrow \frac{1}{2}x = 10 \Rightarrow x = 20.$$

(2) **Solução 1** Como $y_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e a sequência (y_n) é limitada, existe um

real positivo M tal que $0 \leq y_n \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Desta forma,

$$0 \leq x_n y_n \leq M x_n$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Agora, observe que $\lim(Mx_n) = 0$. Assim sendo, é possível aplicar o teorema do sanduíche para concluir que $\lim(x_n y_n) = 0$.

Solução 2 Como $y_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e a sequência (y_n) é limitada, existe um real positivo M tal que $0 \leq y_n \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Desta forma,

$$0 \leq x_n y_n \leq M x_n$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Seja ε um número positivo qualquer. Como $\lim(x_n) = 0$, existe um número natural $K(\varepsilon)$ tal que

$$n \geq K(\varepsilon) \implies |x_n - 0| < \frac{\varepsilon}{M} \implies 0 \leq M|x_n - 0| = Mx_n < \varepsilon \ .$$

Assim sendo,

$$0 \leq x_n y_n < \varepsilon \implies |x_n y_n - 0| < \varepsilon$$

para todo $n \geq K(\varepsilon)$. Logo, $\lim(x_n y_n) = 0$.

(3) A função de Lagrange ($\mathcal{L}$) é dada por

$$\mathcal{L} = \sum_{t=0}^{\infty} \left\{ \beta^t U(c_t) - \lambda_t [c_t + k_{t+1} - (1-\delta)k_t - f(k_t)] \right\} \ .$$

As condições de primeira ordem são

$$\beta^t U'(c_t) = \lambda_t \ , \tag{1}$$

$$-\lambda_t + \lambda_{t+1}[1 - \delta + f'(k_{t+1})] = 0 \ , \tag{2}$$

$$c_t + k_{t+1} - (1-\delta)k_t = f(k_t) \tag{3}$$

e

$$\lim_{t \to \infty} \lambda_t k_{t+1} = 0 \ . \tag{4}$$

No tocante a caracterização, observe que (2) é equivalente a

$$\frac{\lambda_{t+1}}{\lambda_t} = \frac{1}{1 - \delta + f'(k_{t+1})},$$

ao passo que (1) implica que

$$\frac{\lambda_{t+1}}{\lambda_t} = \frac{\beta U'(c_{t+1})}{U'(c_t)}.$$

Combine as duas últimas igualdades para concluir que

$$\frac{\beta U'(c_{t+1})}{U'(c_t)} = \frac{1}{1 - \delta + f'(k_{t+1})}. \tag{5}$$

Adicionalmente, juntas (1) e (4) implicam que

$$\lim_{t \to \infty} \beta^t U'(c_t) k_{t+1} = 0 \ . \tag{6}$$

Dito isto, a solução é caracterizada pelas seguintes três igualdades: (3), (5) e (6).