UFRJ Análise Matemática para Economistas P2 Professor Alexandre B. Cunha Resolva 2 (duas) das 3 (três) questões.

(1) Considere a sequência de números reais definida recursivamente por $y_1 = 33$ e

$$y_{n+1} = \frac{1}{3}y_n + 4 \ .$$

2025/0

Prove que (y_n) é convergente e calcule o seu limite.

(2) Sejam b um número real menor que 1 e (z_n) a sequência definida por

$$z_n = \frac{b^n}{n^5}.$$

Mostre que $\lim(z_n) = 0$.

(3) Considere a sequência de intervalos dada por

$$I_n = \left[3, 3 + \frac{1}{n}\right).$$

Mostre que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{3\}.$$

Respostas

(1) Seja P(n) a afirmativa

$$0 \le y_{n+1} \le y_n \le 33.$$

Utilizaremos o Princípio da Indução para mostrar que ela é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $y_1 = 33$ e $y_2 = 15$, P(1) é verdadeira. Agora, assuma que P(n) se verifique. Logo,

$$0 \leq \frac{1}{3}y_{n+1} \leq \frac{1}{3}y_n \leq 11 \implies 4 \leq \frac{1}{3}y_{n+1} + 4 \leq \frac{1}{3}y_n + 4 \leq 15 \implies 4 \leq y_{n+2} \leq y_{n+1} \leq 15 \implies 0 \leq y_{n+2} \leq y_{n+1} \leq 33.$$

Tendo em vista que P(n) é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$, concluímos que (y_n) é decrescente e limitada. Logo, ela é convergente. Por fim, denote o seu limite por y. Desta forma,

$$y = \frac{1}{3}y + 4 \implies 3y = y + 12 \implies 2y = 12 \implies y = 6.$$

(2) Inicialmente, observe que $z_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Adicionalmente,

$$\frac{z_{n+1}}{z_n} = \frac{b^{n+1}}{(n+1)^5} \frac{n^5}{b^n} = b \left(\frac{n}{n+1}\right)^5 = b \left(\frac{1}{1+1/n}\right)^5.$$

Como $1 + (1/n) \neq 0$ e $\lim(1 + 1/n) = 1$, podemos concluir que

$$\lim \left(\frac{1}{1+1/n}\right) = 1 \implies \lim \left(\frac{1}{1+1/n}\right)^5 = 1.$$

Desta forma,

$$\lim \left(\frac{z_{n+1}}{z_n}\right) = b.$$

Tendo em vista que $b \in (0,1)$, $\lim(z_n) = 0$.

(3) Denote o conjunto $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ por A. Como $3 \in I_n$ para todo $n, 3 \in A$. Seja x um número real diferente de 3. Concluiremos a resposta mostrando que $x \notin A$. Há dois casos a considerar: (i) x < 3 e (ii) x > 3. Considere o caso (i). Em tal contexto, $x \notin I_1$. Logo, $x \notin A$. No tocante ao caso (ii), seja N qualquer natural maior que 1/(x-3). Desta forma,

$$\frac{1}{N} < x - 3 \implies 3 + \frac{1}{N} < x \implies x \notin I_N.$$

Assim sendo, $x \notin A$.