UFRJ **Análise Matemática para Economistas** **P1** **2024/0**
Professor Alexandre B. Cunha
Resolva 2 (duas) das 3 (três) questões.

(1) Utilize o Princípio da Indução para provar que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i=1}^{n}(2i+6) = n(n+7)\ .$$

(2) Sejam A e B dois conjuntos limitados e não vazios contidos em $\mathbb{R}$. Mostre que

$$A \subseteq B \Rightarrow \inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B\ .$$

(3) Sejam X e Y dois conjuntos tais que cada um deles possui n elementos, onde $n \in \mathbb{N}$. Mostre que existe uma bijeção de X em Y.

Respostas

(1) Seja $P(n)$ a afirmativa em análise. Como

$$\sum_{i=1}^{1}(2i+6) = 8 = 1 \times (1+7),$$

$P(1)$ é verdadeira.

Resta mostrar que $[P(n) \Rightarrow P(n+1)]$. Assuma que $P(n)$ se verifica e some a expressão $[2(n+1)+6]$ a ambos os lados da igualdade. Desta forma,

$$\left[\sum_{i=1}^{n}(2i+6)\right] + [2(n+1)+6] = n(n+7) + [2(n+1)+6] \Rightarrow$$
$$\sum_{i=1}^{n+1}(2i+6) = n^2+7n+[2n+8] = n^2+9n+8. \tag{1}$$

Ademais,

$$n^2+9n+8 = (n+1)(n+8) = (n+1)[(n+1)+7].$$

Assim sendo,

$$\sum_{i=1}^{n+1}(2i+6) = (n+1)[(n+1)+7]$$

Logo, $P(n+1)$ também se verifica.

(2) Seja x qualquer elemento de A. As definições de ínfimo e supremo implicam que $\inf A \leq x \leq \sup A$. Assim sendo,

$$\inf A \leq \sup A. \tag{2}$$

Adicionalmente, o fato de que $A \subseteq B$ implica que $x \in B$. Desta forma, $x \leq \sup B$. Logo, $\sup B$ é uma cota superior de A. Como $\sup A$ é a menor cota superior de A,

$$\sup A \leq \sup B. \tag{3}$$

Similarmente, $\inf B \leq x$, o que implica que $\inf B$ é uma cota inferior de A. Tendo em vista que $\inf A$ é a maior cota inferior de A,

$$\inf B \leq \inf A. \tag{4}$$

Combine as desigualdades (2), (3) e (4) para obter o resultado desejado.

(3) Como ambos X e Y têm n elementos, existem bijeções $f : \mathbb{N}_n \to X$ e $g : \mathbb{N}_n \to Y$. Ademais, o fato de f ser um bijeção implica que a função inversa $f^{-1} : X \to \mathbb{N}_n$ está bem definida e também é uma bijeção. Considere agora a função $h : X \to Y$, onde $h(x) = g(f^{-1}(x))$. Como ambas g e f^{-1} são bijeções, podemos concluir que h também é uma bijeção.