UFRJ Análise Matemática para Economistas P1 2020/0
Professor Alexandre B. Cunha
Resolva 2 (duas) das 3 (três) questões.

(1) Sejam f uma função de X em Y e A e B dois subconjuntos de X. Mostre que

$$f(A) \cup f(B) \subseteq f(A \cup B) \ .$$

(2) Utilize o Princípio da Indução para provar que

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{3}\right)^{i} = \frac{1-(1/3)^{n}}{2}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

(3) Sejam A e B dois conjuntos limitados e não vazios contidos em $\mathbb{R}$. Mostre que

$$A \subseteq B \Rightarrow \inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B \ .$$

Respostas

(1) Seja y qualquer elemento de $f(A) \cup f(B)$. Logo, (i) $y \in f(A)$ ou (ii) $y \in f(B)$. Se (i) se verifica, então existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$. Como x também pertence a $A \cup B$, pode se concluir que $f(x) \in f(A \cup B)$. Tendo em vista que $y = f(x)$, $y \in f(A \cup B)$. O mesmo raciocínio estabelece que se (ii) é verdadeira, então $y \in f(A \cup B)$. Desta forma, y certamente é um elemento de $f(A \cup B)$. Logo, $f(A) \cup f(B) \subseteq f(A \cup B)$.

(2) Seja $P(n)$ a afirmativa em análise. Como

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{1} = \frac{1}{3} = \frac{2/3}{2} = \frac{1-(1/3)^{1}}{2},$$

então $P(1)$ é verdadeira. Resta mostrar que $[P(n) \Rightarrow P(n+1)]$. Assuma que $P(n)$ se verifica e some $(1/3)^{n+1}$ a ambos os lados da igualdade. Desta forma,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} \left(\frac{1}{3}\right)^{i} &= \frac{1-(1/3)^{n}}{2} + \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} = \frac{1-(1/3)^{n} + 2 \times (1/3)^{n+1}}{2} \Rightarrow \\
\sum_{i=1}^{n+1} \left(\frac{1}{3}\right)^{i} &= \frac{1-(1/3)^{n}\left[1 - 2 \times (1/3)\right]}{2} = \frac{1-(1/3)^{n}\left[1/3\right]}{2} = \frac{1-(1/3)^{n+1}}{2}.
\end{aligned}$$

Logo, $P(n+1)$ também se verifica.

(3) Seja x qualquer elemento de A. As definições de ínfimo e supremo implicam que $\inf A \leq x \leq \sup A$. Assim sendo,

$$\inf A \leq \sup A. \tag{1}$$

Adicionalmente, o fato de que $A \subseteq B$ implica que $x \in B$. Desta forma, $x \leq \sup B$. Logo, $\sup B$ é uma cota superior de A. Como $\sup A$ é a menor cota superior de A,

$$\sup A \leq \sup B. \tag{2}$$

Similarmente, $\inf B \leq x$, o que implica que $\inf B$ é uma cota inferior de A. Tendo em vista que $\inf A$ é a maior cota inferior de A,

$$\inf B \leq \inf A. \tag{3}$$

Combine as desigualdades (1), (2) e (3) para obter o resultado desejado.

UFRJ Análise Matemática para Economistas P2 2020/0
Professor Alexandre B. Cunha
Resolva 2 (duas) das 3 (três) questões.

(1) Seja (x_n) uma sequência de números reais. Mostre que se (x_n) é convergente, então (x_n) é uma sequência de Cauchy.

(2) Seja (y_n) a sequência de números reais definida indutivamente por $y_{n+1} = \frac{1}{2}y_n + 4$ e $y_1 = 16$. Prove que (y_n) é convergente e calcule o seu limite.

(3) Considere o problema de selecionar $\{c_t, k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}$ de forma a maximizar

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t)$$

sujeito à restrição

$$c_t + k_{t+1} - (1-\delta)k_t \leq f(k_t) \ , \ k_0 = \bar{k} \ .$$

Ambas as funções u e f são estritamente crescentes, côncavas, diferenciáveis e satisfazem à condição de Inada. Monte a função de Lagrange e enuncie as condições de primeira ordem. Em seguida, caracterize a solução do problema (a sua caracterização não pode depender do multiplicador de Lagrange).

Respostas

(1) Seja ε um real positivo. Como (x_n) é convergente, existem um natural $K(\varepsilon/2)$ e um real x tal que

$$|x_n - x| < \varepsilon/2 \ \ \& \ \ |x_m - x| < \varepsilon/2$$

para todo $m, n \geq K(\varepsilon/2)$. Defina $H(\varepsilon) = K(\varepsilon/2)$ e suponha que $m, n \geq H(\varepsilon)$. Assim sendo,

$$|x_n - x_m| = |(x_n - x) + (x - x_m)| \leq |x_n - x| + |x_m - x| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \Rightarrow$$
$$|x_n - x_m| < \varepsilon.$$

(2) Seja $P(n)$ a afirmativa

$$0 \leq y_{n+1} \leq y_n \leq 16.$$

Utilizaremos o Princípio da Indução para mostrar que ela é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $y_1 = 16$ e $y_2 = 12$, $P(1)$ é verdadeira. Agora, assuma que $P(n)$ se verifique. Logo,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{1}{2}y_{n+1} \leq \frac{1}{2}y_n \leq 8 \Rightarrow 4 \leq \frac{1}{2}y_{n+1} + 4 \leq \frac{1}{2}y_n + 4 \leq 12 \Rightarrow \\ 4 &\leq y_{n+2} \leq y_{n+1} \leq 12 \Rightarrow 0 \leq y_{n+2} \leq y_{n+1} \leq 16. \end{aligned}$$

Tendo em vista que $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$, concluímos que (y_n) é decrescente e limitada. Logo, ela é convergente. Por fim, denote o seu limite por y. Desta forma,

$$y = \frac{1}{2}y + 4 \Rightarrow \frac{1}{2}y = 4 \Rightarrow y = 8.$$

(3) A função de Lagrange ($\mathcal{L}$) é dada por

$$\mathcal{L} = \sum_{t=0}^{\infty} \left\{ \beta^t u(c_t) - \lambda_t [c_t + k_{t+1} - (1-\delta)k_t - f(k_t)] \right\} \ .$$

As condições de primeira ordem são

$$\beta^t u'(c_t) = \lambda_t \ , \tag{1}$$

$$-\lambda_t + \lambda_{t+1}[1 - \delta + f'(k_{t+1})] = 0 \ , \tag{2}$$

$$c_t + k_{t+1} - (1-\delta)k_t = f(k_t) \tag{3}$$

e

$$\lim_{t \to \infty} \lambda_t k_{t+1} = 0 \ . \tag{4}$$

No tocante a caracterização, observe que (2) é equivalente a

$$\frac{\lambda_{t+1}}{\lambda_t} = \frac{1}{1 - \delta + f'(k_{t+1})},$$

ao passo que (1) implica que

$$\frac{\lambda_{t+1}}{\lambda_t} = \frac{\beta u'(c_{t+1})}{u'(c_t)}.$$

Combine as duas últimas igualdades para concluir que

$$\frac{\beta u'(c_{t+1})}{u'(c_t)} = \frac{1}{1 - \delta + f'(k_{t+1})}. \tag{5}$$

Adicionalmente, juntas (1) e (4) implicam que

$$\lim_{t \to \infty} \beta^t u'(c_t) k_{t+1} = 0 \ . \tag{6}$$

Dito isto, a solução é caracterizada pelas seguintes três igualdades: (3), (5) e (6).

UFRJ Análise Matemática para Economistas P1 2021/0
Professor Alexandre B. Cunha
Resolva 2 (duas) das 3 (três) questões.

(1) Utilize o Princípio da Indução para provar que

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2 \ .$$

(2) Sejam $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ duas funções injetivas. Defina $h : X \to Z$ de forma que $h(x) = g(f(x))$. Mostre que h também é injetiva.

(3) Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ e $g : X \to \mathbb{R}$ duas funções limitadas. Mostre que se $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in X$, então

$$\sup_{x\in X} f(x) \leq \sup_{x \in X} g(x) \ .$$

Respostas

(1) Seja $P(n)$ a afirmativa em análise. Como

$$\sum_{i=1}^{1}(2i-1) = 1 = 1^2,$$

$P(1)$ é verdadeira.

Resta mostrar que $[P(n) \Rightarrow P(n+1)]$. Assuma que $P(n)$ se verifica e some a expressão $[2(n+1)-1]$ a ambos os lados da igualdade. Desta forma,

$$\begin{aligned}\left[\sum_{i=1}^{n}(2i-1)\right] + [2(n+1)-1] &= n^2 + [2(n+1)-1] \Rightarrow \\ \sum_{i=1}^{n+1}(2i-1) &= n^2+2n+1 = (n+1)^2.\end{aligned}$$

Logo, $P(n+1)$ também se verifica.

(2) Sejam x_1 e x_2 elementos de X tais que $h(x_1) = h(x_2)$. Tendo em vista a definição de h, podemos concluir que $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$. Com g é injetiva, $f(x_1) = f(x_2)$. Por sua vez, o fato de que f também é injetiva implica que $x_1 = x_2$. Assim sendo, h é injetiva.

(3) A definição de supremo implica que

$$g(x) \leq \sup_{y \in X} g(y),\ \forall x \in X\ .$$

Combine a desigualdade acima com a hipótese de que $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in X$ para concluir que

$$f(x) \leq \sup_{y \in X} g(y),\ \forall x \in X\ .$$

Desta forma, $\sup_{y \in X} g(y)$ é uma cota superior para f. Tendo em vista que $\sup_{x \in X} f(x)$ é a menor cota superior de f, concluímos então que

$$\sup_{x \in X} f(x) \leq \sup_{x \in X} g(x)\ .$$

UFRJ   Análise Matemática para Economistas   P2   2021/0
Professor Alexandre B. Cunha
Resolva 2 (duas) das 3 (três) questões.

(1) Sejam (x_n) uma sequência de números reais, a um número real positivo e (y_n) a sequência definida por $y_n = ax_n$. Mostre que se $\lim(x_n) = x$, então $\lim(y_n) = ax$.

(2) Considere a sequência de números reais definida recursivamente por $z_1 = 80$ e

$$z_{n+1} = \frac{1}{4}z_n + 12 \ .$$

Prove que (z_n) é convergente e calcule o seu limite.

(3) Seja (x_n) a sequência definida por

$$x_n = n^2\left(\frac{1}{3}\right)^n .$$

Mostre que $\lim(x_n) = 0$.

Respostas

(1) Seja ε um número positivo qualquer. Como $\lim(x_n) = x$, existe um número natural $K(\varepsilon)$ tal que

$$n \geq K(\varepsilon) \Rightarrow |x_n - x| < \frac{\varepsilon}{a} \Rightarrow a|x_n - x| < \varepsilon \Rightarrow |ax_n - ax| < \varepsilon \Rightarrow |y_n - ax| < \varepsilon \ .$$

Assim sendo, $\lim(y_n) = ax$.

(2) Seja $P(n)$ a afirmativa

$$0 \leq z_{n+1} \leq z_n \leq 80.$$

Utilizaremos o Princípio da Indução para mostrar que ela é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $z_1 = 80$ e $z_2 = 32$, $P(1)$ é verdadeira. Agora, assuma que $P(n)$ se verifique. Logo,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{1}{4}z_{n+1} \leq \frac{1}{4}z_n \leq 20 \Rightarrow 12 \leq \frac{1}{4}z_{n+1} + 12 \leq \frac{1}{4}z_n + 12 \leq 32 \Rightarrow \\ 12 &\leq z_{n+2} \leq z_{n+1} \leq 32 \Rightarrow 0 \leq z_{n+2} \leq z_{n+1} \leq 80. \end{aligned}$$

Tendo em vista que $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$, concluímos que (z_n) é decrescente e limitada. Logo, ela é convergente. Por fim, denote o seu limite por z. Desta forma,

$$z = \frac{1}{4}z + 12 \Rightarrow \frac{3}{4}z = 12 \Rightarrow z = 16.$$

(3) Inicialmente, observe que

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{n^2 \left(\frac{1}{3}\right)^n} = \left(\frac{n^2+2n+1}{n^2}\right)\frac{1}{3} = \left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)\frac{1}{3}.$$

Como $x_n > 0$ e

$$\lim\left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right) = 1,$$

podemos concluir que

$$\lim\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right) = \frac{1}{3} < 1 \Rightarrow \lim(x_n) = 0.$$

UFRJ Análise Matemática para Economistas P1 2022/0
Professor Alexandre B. Cunha
Resolva 2 (duas) das 3 (três) questões.

(1) Sejam f uma função de X em Y e A e B dois subconjuntos de Y. Mostre que

$$f^{-1}(A \cup B) \subseteq f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \ .$$

(2) Utilize o Princípio da Indução para provar que

$$1 + 3 + 9 + ... + 3^{n-1} = \frac{3^n - 1}{2} \ .$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

(3) Seja X o conjunto dado por $\{x \in \mathbb{R} : -5 \leq x < 12\}$. Mostre que $\sup X = 12$.

Respostas

(1) Seja x um elemento genérico de $f^{-1}(A \cup B)$. Logo, $f(x) \in A \cup B$. Assim sendo, (i) $f(x) \in A$ ou (ii) $f(x) \in B$. Se (i) se verifica, então $x \in f^{-1}(A)$. Similarmente, se (ii) é satisfeita, então $x \in f^{-1}(B)$. Como ambos $f^{-1}(A)$ e $f^{-1}(B)$ são subconjuntos de $f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$, concluímos que x pertence a esse último conjunto. Desta forma, $f^{-1}(A \cup B) \subseteq f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.

(2) Seja $P(n)$ a afirmativa em análise. Como

$$1 = \frac{3^1 - 1}{2},$$

$P(1)$ é verdadeira. Resta mostrar que $[P(n) \implies P(n+1)]$. Assuma que $P(n)$ se verifica e some a expressão 3^n a ambos os lados da igualdade. Desta forma,

$$1 + 3 + 9 + ... + 3^{n-1} + 3^n = \frac{3^n - 1}{2} + 3^n = \frac{3^n - 1 + 2 \times 3^n}{2} = \frac{3^n(1+2) - 1}{2} \implies$$
$$1 + 3 + 9 + ... + 3^n = \frac{3^{n+1} - 1}{2}.$$

Logo, $P(n+1)$ também se verifica.

(3) Tendo em vista a definição de X, 12 é um cota superior para o referido conjunto. Seja v um número real tal que $v < 12$. Se $v \leq 10$, então $v < 11 \in X$; logo, v não é uma cota superior de X. Suponha agora que $v > 10$. Considere o número x_v dado por

$$x_v = v + \frac{12 - v}{2}.$$

Observe que

$$x_v \geq 12 \implies v + \frac{12 - v}{2} v \geq 12 \implies 2v + 12 - v \geq 24 \implies v \geq 12.$$

Tendo em vista que $v < 12$, concluímos que $x_v < 12$. Como $12 - v > 0$, $x_v > v \geq -5$. Desta forma, $x_v \in X$. Consequentemente, v não é uma cota superior de X. Assim sendo, 12 é a menor cota superior de X, o que implica que $\sup X = 12$.

UFRJ Análise Matemática para Economistas P2 2022/0
Professor Alexandre B. Cunha
Resolva 2 (duas) das 3 (três) questões.

(1) Sejam (x_n) e (y_n) duas sequências convergentes e (z_n) a sequência definida por $z_n = x_n + y_n$. Mostre que $\lim(z_n) = \lim(x_n) + \lim(y_n)$.

(2) Seja (x_n) a sequência definida por

$$x_n = (n+2)a^n \ ,$$

onde $a \in (0,1)$. Mostre que $\lim(x_n) = 0$.

(3) Seja (y_n) a sequência de números reais definida indutivamente por $y_1 = 20$ e

$$y_{n+1} = \frac{1}{4}y_n + 3 \ .$$

Prove que (y_n) é convergente e calcule o seu limite.

Respostas

(1) Denote $\lim(x_n)$ e $\lim(y_n)$ por, respectivamente, x e y. Seja ε um número positivo qualquer. A definição de limite implica que existem números inteiros $K_x(\varepsilon/2)$ e $K_y(\varepsilon/2)$ tais que

$$n \geq K_x(\varepsilon/2) \Rightarrow |x_n - x| < \varepsilon/2$$

e

$$n \geq K_y(\varepsilon/2) \Rightarrow |y_n - y| < \varepsilon/2.$$

Desta forma,

$$n \geq \max\{K_x(\varepsilon/2), K_y(\varepsilon/2)\} \Rightarrow |x_n - x| + |y_n - y| < \varepsilon.$$

Defina $K(\varepsilon) = \max\{K_x(\varepsilon/2), K_y(\varepsilon/2)\}$. Utilize a desigualdade triangular para concluir que

$$n \geq K(\varepsilon) \Rightarrow |(x_n + y_n) - (x + y)| < \varepsilon \Rightarrow |z_n - (x + y)| < \varepsilon \ .$$

(2) Inicialmente, observe que $x_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Adicionalmente,

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+3)a^{n+1}}{(n+2)a^n} = \frac{n+3}{n+2}a = \frac{1+\frac{3}{n}}{1+\frac{2}{n}}a.$$

Como

$$\lim\left(1 + \frac{3}{n}\right) = \lim\left(1 + \frac{2}{n}\right) = 1,$$

podemos concluir que

$$\lim\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right) = a.$$

Tendo em vista que $a \in (0,1)$, $\lim(x_n) = 0$.

(3) Seja $P(n)$ a afirmativa

$$0 \leq y_{n+1} \leq y_n \leq 20.$$

Utilizaremos o Princípio da Indução para mostrar que ela é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $y_1 = 20$ e $y_2 = 8$, $P(1)$ é verdadeira. Agora, assuma que $P(n)$ se verifique. Logo,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{1}{4}y_{n+1} \leq \frac{1}{4}y_n \leq 5 \Rightarrow 3 \leq \frac{1}{4}y_{n+1} + 3 \leq \frac{1}{4}y_n + 3 \leq 8 \Rightarrow \\ 3 &\leq y_{n+2} \leq y_{n+1} \leq 8 \Rightarrow 0 \leq y_{n+2} \leq y_{n+1} \leq 20. \end{aligned}$$

Tendo em vista que $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$, a sequência (y_n) é decrescente e limitada. Logo, ela é convergente. Denote o seu limite por y. Desta forma,

$$y = \frac{1}{4}y + 3 \Rightarrow 4y = y + 12 \Rightarrow 3y = 12 \Rightarrow y = 4.$$

UFRJ **Análise Matemática para Economistas** **P1** **2023/0**
Professor Alexandre B. Cunha
Resolva 2 (duas) das 3 (três) questões.

(1) Utilize o Princípio da Indução para provar que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$4 + 8 + 12 + ... + 4n = 2n(n + 1).$$

(2) Sejam A e B dois conjuntos limitados e não vazios contidos em $\mathbb{R}$. Mostre que

$$\inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}.$$

(3) Sejam $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ duas funções sobrejetivas. Defina $h : X \to Z$ de forma que $h(x) = g(f(x))$. Mostre que h também é sobrejetiva.

Respostas

(1) Seja $P(n)$ a afirmativa em análise. Tendo em vista que

$$4 = 2 \times 1(1 + 1),$$

a afirmativa $P(1)$ está correta. Logo, resta mostrar que $[P(n) \Rightarrow P(n+1)]$. Assuma que $P(n)$ seja verdade e some $4(n + 1)$ a ambos os lados da igualdade. Desta forma,

$$4 + 8 + 12 + ... + 4n + 4(n + 1) = 2n(n + 1) + 4(n + 1).$$

Como

$$2n(n + 1) + 4(n + 1) = (2n + 4)(n + 1) = 2(n + 2)(n + 1),$$

podemos concluir que

$$4 + 8 + 12 + ... + 4(n + 1) = 2(n + 1)(n + 2).$$

Assim sendo, $P(n + 1)$ também se verifica.

(2) Para simplificar a notação, denote $\min\{\inf A, \inf B\}$ por c. Seja x qualquer elemento de $A \cup B$. Se $x \in A$, então $x \geq \inf A \geq c$; se $x \in B$, então $x \geq \inf B \geq c$. Concluímos então que $x \geq c$. Logo, c é uma cota inferior de $A \cup B$.

Para encerrar, é preciso mostrar que c é a maior cota inferior de $A \cup B$. Sem perda de generalidade, assuma que $\inf A \leq \inf B$. Seja y um número qualquer maior do c. Como $c = \inf A$, então existe $s_y \in A$ tal que $s_y < y$. Tendo em vista que $s_y \in A \cup B$, concluímos que y não é uma cota inferior de $A \cup B$. Assim sendo, c é a maior cota inferior de $A \cup B$.

(3) **Solução 1** Seja $\bar{z}$ um elemento qualquer de Z. Como g é sobrejetiva, existe $\bar{y} \in Y$ tal $g(\bar{y}) = \bar{z}$. De forma similar, o fato de f ser sobrejetiva implica que existe $\bar{x} \in X$ tal $f(\bar{x}) = \bar{y}$. Podemos então concluir que $\bar{z} = g(f(\bar{x})) = h(\bar{x})$; ou seja, existe $\bar{x} \in X$ tal $h(\bar{x}) = \bar{z}$. Assim sendo, h é sobrejetiva.
Solução 2 Inicialmente, observe que $h(X) = g(f(X))$. O fato de que f é sobrejetiva implica que $f(X) = Y$. Logo, $h(X) = g(Y)$. Porém, g também é sobrejetiva; desta forma, $g(Y) = Z$. Podemos então concluir que $h(X) = Z$. Esta última igualdade implica que a função h é sobrejetiva.

UFRJ Análise Matemática para Economistas P2 2023/0
Professor Alexandre B. Cunha
Resolva 2 (duas) das 3 (três) questões.

(1) Considere a sequência de números reais definida por $x_n = 2/(n+1)$. Prove que (x_n) é uma sequência de Cauchy utilizando a definição desse conceito.

(2) Seja (y_n) uma sequência de números reais. Mostre que se (y_n) é convergente, então ela é limitada.

(3) Considere a sequência de números reais definida recursivamente por $z_1 = 6$ e

$$z_{n+1} = \frac{1}{3} z_n + \frac{2}{3} \ .$$

Prove que (z_n) é convergente e calcule o seu limite.

Respostas

(1) **Solução 1** Seja $H(\varepsilon)$ um número natural maior que $2/\varepsilon$. Observe que se $m > n \geq H(\varepsilon)$, então

$$n > \frac{2}{\varepsilon} \Rightarrow n+1 > \frac{2}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{2}{n+1} < \varepsilon \Rightarrow 0 < \frac{2}{n+1} - \frac{2}{m+1} < \varepsilon \Rightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon \ .$$

Solução 2 Seja $H(\varepsilon)$ um número natural maior que $4/\varepsilon$. Observe que

$$n \geq H(\varepsilon) \Rightarrow n > \frac{4}{\varepsilon} \Rightarrow n+1 > \frac{4}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{2}{n+1} < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \left| \frac{2}{n+1} \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

De forma similar,

$$m \geq H(\varepsilon) \Rightarrow \left| -\frac{2}{m+1} \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Assim sendo, se $n \geq H(\varepsilon)$ e $m \geq H(\varepsilon)$, então

$$|x_n - x_m| = \left| \frac{2}{n+1} - \frac{2}{m+1} \right| \leq \left| \frac{2}{n+1} \right| + \left| -\frac{2}{m+1} \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

(2) Denote o limite de (y_n) por y. Logo, existe um número natural K tal que se $n \geq K$, então $|y_n - y| < 1$. Como

$$|y_n - y| < 1 \Rightarrow |y_n - y| + |y| < 1 + |y| \Rightarrow |y_n| < 1 + |y| \ ,$$

sabemos que $|y_n| < 1 + |y|$ para todo $n \geq K$. Defina M de acordo com

$$M = \max\{|y_1|, |y_2|, ..., |y_{K-1}|, 1 + |y|\} \ .$$

Por fim, observe que $|y_n| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(3) Seja $P(n)$ a afirmativa

$$0 \leq z_{n+1} \leq z_n \leq 6.$$

Utilizaremos o Princípio da Indução para mostrar que ela é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $z_1 = 6$ e $z_2 = 8/3$, $P(1)$ é verdadeira. Agora, assuma que $P(n)$ se verifique. Logo,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{1}{3}z_{n+1} \leq \frac{1}{3}z_n \leq 2 \Rightarrow \frac{2}{3} \leq \frac{1}{3}z_{n+1} + \frac{2}{3} \leq \frac{1}{3}z_n + \frac{2}{3} \leq 2 + \frac{2}{3} \Rightarrow \\ \frac{2}{3} &\leq z_{n+2} \leq z_{n+1} \leq 2 + \frac{2}{3} \Rightarrow 0 \leq z_{n+2} \leq z_{n+1} \leq 6. \end{aligned}$$

Tendo em vista que $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$, a sequência (z_n) é decrescente e limitada. Logo, ela é convergente. Denote o seu limite por z. Desta forma,

$$z = \frac{1}{3}z + \frac{2}{3} \Rightarrow 3z = z + 2 \Rightarrow 2z = 2 \Rightarrow z = 1.$$

UFRJ Análise Matemática para Economistas P1 2024/0
Professor Alexandre B. Cunha
Resolva 2 (duas) das 3 (três) questões.

(1) Utilize o Princípio da Indução para provar que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i=1}^{n}(2i+6) = n(n+7) \ .$$

(2) Sejam A e B dois conjuntos limitados e não vazios contidos em $\mathbb{R}$. Mostre que

$$A \subseteq B \Rightarrow \inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B \ .$$

(3) Sejam X e Y dois conjuntos tais que cada um deles possui n elementos, onde $n \in \mathbb{N}$. Mostre que existe uma bijeção de X em Y.

Respostas

(1) Seja $P(n)$ a afirmativa em análise. Como

$$\sum_{i=1}^{1}(2i+6) = 8 = 1 \times (1+7),$$

$P(1)$ é verdadeira.

Resta mostrar que $[P(n) \Rightarrow P(n+1)]$. Assuma que $P(n)$ se verifica e some a expressão $[2(n+1)+6]$ a ambos os lados da igualdade. Desta forma,

$$\left[\sum_{i=1}^{n}(2i+6)\right] + [2(n+1)+6] = n(n+7) + [2(n+1)+6] \Rightarrow$$
$$\sum_{i=1}^{n+1}(2i+6) = n^2 + 7n + [2n+8] = n^2 + 9n + 8. \tag{1}$$

Ademais,
$$n^2 + 9n + 8 = (n+1)(n+8) = (n+1)[(n+1)+7].$$

Assim sendo,
$$\sum_{i=1}^{n+1}(2i+6) = (n+1)[(n+1)+7]$$

Logo, $P(n+1)$ também se verifica.

(2) Seja x qualquer elemento de A. As definições de ínfimo e supremo implicam que $\inf A \leq x \leq \sup A$. Assim sendo,

$$\inf A \leq \sup A. \tag{2}$$

Adicionalmente, o fato de que $A \subseteq B$ implica que $x \in B$. Desta forma, $x \leq \sup B$. Logo, $\sup B$ é uma cota superior de A. Como $\sup A$ é a menor cota superior de A,

$$\sup A \leq \sup B. \tag{3}$$

Similarmente, $\inf B \leq x$, o que implica que $\inf B$ é uma cota inferior de A. Tendo em vista que $\inf A$ é a maior cota inferior de A,

$$\inf B \leq \inf A. \tag{4}$$

Combine as desigualdades (2), (3) e (4) para obter o resultado desejado.

(3) Como ambos X e Y têm n elementos, existem bijeções $f : \mathbb{N}_n \to X$ e $g : \mathbb{N}_n \to Y$. Ademais, o fato de f ser um bijeção implica que a função inversa $f^{-1} : X \to \mathbb{N}_n$ está bem definida e também é uma bijeção. Considere agora a função $h : X \to Y$, onde $h(x) = g(f^{-1}(x))$. Como ambas g e f^{-1} são bijeções, podemos concluir que h também é uma bijeção.

UFRJ   Análise Matemática para Economistas   P2   2024/0
Professor Alexandre B. Cunha
Resolva 2 (duas) das 3 (três) questões.

(1) Considere a sequência de números reais definida recursivamente por $x_1 = 4$ e

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + 10 \ .$$

Prove que (x_n) é convergente e calcule o seu limite.

(2) Sejam (x_n) e (y_n) duas sequências de números reais tais que $x_n \geq 0$ e $y_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Mostre que se $\lim(x_n) = 0$ e (y_n) é limitada, então $\lim(x_n y_n) = 0$.

(3) Considere o problema de selecionar $\{c_t, k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}$ de forma a maximizar

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(c_t)$$

sujeito à restrição

$$c_t + k_{t+1} - (1-\delta)k_t \leq f(k_t) \ , \ k_0 = \bar{k} \ .$$

Ambas as funções U e f são estritamente crescentes, côncavas, diferenciáveis e satisfazem à condição de Inada. Monte a função de Lagrange e enuncie as condições de primeira ordem. Em seguida, caracterize a solução do problema (a sua caracterização não pode depender do multiplicador de Lagrange).

Respostas

(1) Seja $P(n)$ a afirmativa

$$0 \leq x_n \leq x_{n+1} \leq 20.$$

Utilizaremos o Princípio da Indução para mostrar que ela é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $x_1 = 4$ e $x_2 = 12$, $P(1)$ é verdadeira. Agora, assuma que $P(n)$ se verifique. Logo,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{1}{2}x_n \leq \frac{1}{2}x_{n+1} \leq 10 \Rightarrow 10 \leq \frac{1}{2}x_n + 10 \leq \frac{1}{2}x_{n+1} + 10 \leq 20 \Rightarrow \\ 10 &\leq x_{n+1} \leq x_{n+2} \leq 20 \Rightarrow 0 \leq x_{n+1} \leq x_{n+2} \leq 20. \end{aligned}$$

Tendo em vista que $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$, concluímos que (x_n) é crescente e limitada. Logo, ela é convergente. Por fim, denote o seu limite por x. Desta forma,

$$x = \frac{1}{2}x + 10 \Rightarrow \frac{1}{2}x = 10 \Rightarrow x = 20.$$

(2) **Solução 1**   Como $y_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e a sequência (y_n) é limitada, existe um

real positivo M tal que $0 \leq y_n \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Desta forma,

$$0 \leq x_n y_n \leq M x_n$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Agora, observe que $\lim(M x_n) = 0$. Assim sendo, é possível aplicar o teorema do sanduíche para concluir que $\lim(x_n y_n) = 0$.

Solução 2 Como $y_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e a sequência (y_n) é limitada, existe um real positivo M tal que $0 \leq y_n \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Desta forma,

$$0 \leq x_n y_n \leq M x_n$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Seja ε um número positivo qualquer. Como $\lim(x_n) = 0$, existe um número natural $K(\varepsilon)$ tal que

$$n \geq K(\varepsilon) \implies |x_n - 0| < \frac{\varepsilon}{M} \implies 0 \leq M|x_n - 0| = M x_n < \varepsilon \ .$$

Assim sendo,

$$0 \leq x_n y_n < \varepsilon \implies |x_n y_n - 0| < \varepsilon$$

para todo $n \geq K(\varepsilon)$. Logo, $\lim(x_n y_n) = 0$.

(3) A função de Lagrange ($\mathcal{L}$) é dada por

$$\mathcal{L} = \sum_{t=0}^{\infty} \left\{ \beta^t U(c_t) - \lambda_t [c_t + k_{t+1} - (1-\delta) k_t - f(k_t)] \right\} \ .$$

As condições de primeira ordem são

$$\beta^t U'(c_t) = \lambda_t \ , \tag{1}$$
$$-\lambda_t + \lambda_{t+1}[1 - \delta + f'(k_{t+1})] = 0 \ , \tag{2}$$
$$c_t + k_{t+1} - (1-\delta) k_t = f(k_t) \tag{3}$$

e

$$\lim_{t \to \infty} \lambda_t k_{t+1} = 0 \ . \tag{4}$$

No tocante a caracterização, observe que (2) é equivalente a

$$\frac{\lambda_{t+1}}{\lambda_t} = \frac{1}{1 - \delta + f'(k_{t+1})},$$

ao passo que (1) implica que

$$\frac{\lambda_{t+1}}{\lambda_t} = \frac{\beta U'(c_{t+1})}{U'(c_t)}.$$

Combine as duas últimas igualdades para concluir que

$$\frac{\beta U'(c_{t+1})}{U'(c_t)} = \frac{1}{1 - \delta + f'(k_{t+1})}. \tag{5}$$

Adicionalmente, juntas (1) e (4) implicam que

$$\lim_{t \to \infty} \beta^t U'(c_t) k_{t+1} = 0 \ . \tag{6}$$

Dito isto, a solução é caracterizada pelas seguintes três igualdades: (3), (5) e (6).