

# ANÁLISE MATEMÁTICA PARA ECONOMISTAS: NOTAS DE AULA

Este documento consiste em notas de aula para o Capítulo 2 de Bartle & Sherbert (*Introduction to Real Analysis*. 3ª edição. Nova Iorque: John Wiley & Sons, 2000).

Elaboração: Alexandre B. Cunha

## 2 Os Números Reais

- É possível construir  $\mathbb{R}$  a partir de  $\mathbb{N}$  ou  $\mathbb{Q}$ . Não faremos isso. Simplesmente assumiremos algumas poucas propriedades básicas e obteremos várias outras.
- Estrutura do capítulo:
  - Seção 2.1: algumas propriedades dos números reais;
  - Seção 2.2: valor absoluto;
  - Seção 2.3: completude;
  - Seção 2.4: alguns resultados fundamentais (exemplos: existência de raiz quadrada e densidade dos racionais em  $\mathbb{R}$ );
  - Seção 2.5: a incontabilidade de  $\mathbb{R}$ .

### 2.1 As Propriedade Algébricas e de Ordenação de $\mathbb{R}$

- Seremos rápidos nesta seção.

**Axioma 2.1.1 (As Propriedade Algébricas de  $\mathbb{R}$ )** Existem duas operações binárias definidas em  $\mathbb{R}$ , denotadas por  $+$  e  $\cdot$  e denominadas, respectivamente, adição e multiplicação. Essas operações satisfazem as seguintes propriedades:

- (A1)  $a + b = b + a$  para todo  $a$  e todo  $b$  em  $\mathbb{R}$ ;
- (A2)  $(a + b) + c = a + (b + c)$ , para todo  $a$ , todo  $b$  e todo  $c$  em  $\mathbb{R}$ ;
- (A3) existe um elemento  $0 \in \mathbb{R}$  tal que  $0 + a = a$  e  $a + 0 = a$  para todo  $a$  em  $\mathbb{R}$ ;

- (A4) para todo  $a \in \mathbb{R}$ , existe um elemento  $-a \in \mathbb{R}$  tal que  $a + (-a) = 0$  e  $(-a) + a = 0$ ;  
 (M1)  $a \cdot b = b \cdot a$  para todo  $a$  e todo  $b$  em  $\mathbb{R}$ ;  
 (M2)  $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ , para todo  $a$ , todo  $b$  e todo  $c$  em  $\mathbb{R}$ ;  
 (M3) existe um elemento  $1 \in \mathbb{R}$  tal que  $1 \cdot a = a$  e  $a \cdot 1 = a$  para todo  $a$  em  $\mathbb{R}$ ;  
 (M4) para todo  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  existe um elemento  $1/a \in \mathbb{R}$  tal que  $a \cdot (1/a) = 1$  e  $(1/a) \cdot a = 1$ ;  
 (D) para todo  $a$ , todo  $b$  e todo  $c$  em  $\mathbb{R}$ ,  $a \cdot (b+c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$  e  $(b+c) \cdot a = (b \cdot a) + (c \cdot a)$ .

- A posição da expressão “para todo” é relevante. A título de ilustração, considere a propriedade (M3). Se a expressão “para todo” fosse colocada no começo, então alguém poderia assumir que o número 1 dependeria de  $a$ .

**Teorema 2.1.2 (a)** Se  $z$  e  $a$  pertencem a  $\mathbb{R}$  e  $z + a = a$ , então  $z = 0$ .

(b) Se  $u$  e  $b \neq 0$  pertencem a  $\mathbb{R}$  e  $u \cdot b = b$ , então  $u = 1$ .

(c) Se  $a \in \mathbb{R}$ , então  $a \cdot 0 = 0$ .

**Prova (esboço) do item (a).**

$$z \stackrel{A3}{=} z + 0 \stackrel{A4}{=} z + (a + (-a)) \stackrel{A2}{=} (z + a) + (-a) \stackrel{z+a=a}{=} a + (-a) \stackrel{A4}{=} 0 \quad \square$$

**Teorema 2.1.3 (a)** Se  $a \neq 0$  e  $b$  pertencem a  $\mathbb{R}$  e satisfazem  $a \cdot b = 1$ , então  $b = 1/a$ .

(b) Se  $a$  e  $b$  pertencem a  $\mathbb{R}$  e  $a \cdot b = 0$ , então  $a = 0$  ou  $b = 0$ .

**Comentário** Os autores não deveriam ter utilizado a palavra *either* no item (b).

## Números Racionais e Irracionais

---

Um elemento  $n$  de  $\mathbb{N}$  é a soma de  $1 \in \mathbb{R}$  com ele mesmo  $n$  vezes (“ $n$ -fold sum”); logo,  $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ . O número  $0 \in \mathbb{R}$  também pertence a  $\mathbb{Z}$  e um elemento  $-n$  de  $\mathbb{Z}$  é igual a “ $n$ -fold sum” de  $-1 \in \mathbb{R}$ ; desta forma,  $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ . Os elementos de  $\mathbb{R}$  que podem ser expressos na forma  $b/a$ , onde  $b$  e  $a$  pertencem a  $\mathbb{Z}$  e  $a \neq 0$ , constituem o conjunto  $\mathbb{Q}$ . Evidentemente,  $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ ; contudo, o fato de que  $\mathbb{Q} \neq \mathbb{R}$  merece alguma reflexão.

**Comentário** Sociedade dos Pitagoreanos (*Pythagorean Society*): já se sabia que não existe  $r \in \mathbb{Q}$  com propriedade que  $r^2 = 2$ . (Desenhar quadrado com lados de dimensão 1 e diagonal com medida  $r$ ). O conjunto  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  é chamado de conjunto dos irracionais.

**Teorema 2.1.4** Não existe  $r \in \mathbb{Q}$  tal que  $r^2 = 2$ .

**Prova.** Suponha, por absurdo, que  $p$  e  $q$  pertencem a  $\mathbb{Z}$  e  $(p/q)^2 = 2$ . Sem perda de generalidade, assumamos que  $p$  e  $q$  são positivos e não tem nenhum fator comum. Como

$$p^2 = 2q^2, \quad (2.1)$$

$p^2$  é um número par. Isso implica que  $p$  também é um número par. Para chegar a essa conclusão, suponha que  $p = 2n - 1$ , onde  $n$  é um número natural. Nesse caso,  $p^2$  seria igual a  $4n^2 - 4n + 1$ , o que implicaria em  $p^2$  ser ímpar. Dado que  $p$  é par,  $p = 2m$  para algum  $m \in \mathbb{N}$ . Logo, (2.1) implica que

$$4m^2 = 2q^2 \Rightarrow q^2 = 2m^2.$$

Assim sendo,  $q^2$  é par e, a exemplo de  $p$ ,  $q$  também é par. Contudo, tal conclusão contradiz o fato de que  $p$  e  $q$  não possuem algum fator comum.  $\square$

**Comentário** Prova ligeiramente distinta da do livro-texto.

## As Propriedades de Ordenação de $\mathbb{R}$

---

**Axioma 2.1.5 (As Propriedades de Ordenação de  $\mathbb{R}$ )** Existe um subconjunto  $\mathbb{P}$  de  $\mathbb{R}$ , denominado de conjunto dos números reais positivos, que satisfaz as seguintes propriedades:

- (i) Se  $a$  e  $b$  pertencem a  $\mathbb{P}$ , então  $a + b$  pertence a  $\mathbb{P}$ .
- (ii) Se  $a$  e  $b$  pertencem a  $\mathbb{P}$ , então  $ab$  pertence a  $\mathbb{P}$ .
- (iii) Se  $a$  pertence a  $\mathbb{R}$ , então exatamente uma dessas três condições se verifica:  $a \in \mathbb{P}$ ,  $a = 0$  e  $-a \in \mathbb{P}$ .

Se  $a \in \mathbb{P}$ , então nós escrevemos  $a > 0$  e afirmamos que  $a$  é positivo. Se  $a \in \mathbb{P} \cup \{0\}$ , então nós escrevemos  $a \geq 0$  e afirmamos que  $a$  é não negativo. Se  $-a \in \mathbb{P} \cup \{0\}$ ... Se  $-a \in \mathbb{P} \cup \{0\}$ ...

**Definição 2.1.6** Sejam  $a$  e  $b$  elementos de  $\mathbb{R}$ .

- (a) Se  $a - b \in \mathbb{P}$ , então nós escrevemos  $a > b$  ou  $b < a$ .
- (b) Se  $a - b \in \mathbb{P} \cup \{0\}$ , então nós escrevemos  $a \geq b$  ou  $b \leq a$ .

**Teorema 2.1.7** Sejam  $a$ ,  $b$  e  $c$  elementos de  $\mathbb{R}$ .

- (a) Se  $a > b$  e  $b > c$ , então  $a > c$ .
- (b) Se  $a > b$ , então  $a + c > b + c$ .
- (c) Se  $a > b$  e  $c > 0$ , então  $ca > cb$ ; se  $a > b$  e  $c < 0$ , então  $ca < cb$ .

**Prova do item (a).** Como ambos  $a - b$  e  $b - c$  pertencem a  $\mathbb{P}$ , então 2.1.5(i) implica que  $(a - b) + (b - c) \in \mathbb{P}$ . Utilize as propriedades (A1), (A2) e (A4) de 2.1.1 para concluir que  $(a - b) + (b - c) = a - c$ . Assim sendo,  $a - c \in \mathbb{P}$ .  $\square$

**Teorema 2.1.8 (a)** Se  $a \in \mathbb{R}$  e  $a \neq 0$ , então  $a^2 > 0$ .

**(b)**  $1 > 0$ .

**(c)** Se  $n \in \mathbb{N}$ , então  $n > 0$ .

Conforme mencionado no livro-texto, não existe um número positivo que seja menor do que todos os outros números positivos. De fato, se  $a > 0$ , então  $0 < (1/2)a < a$ . Atenção: é preciso estabelecer que as duas desigualdades são verdadeiras. Segue-se um **esboço**.

$0 < (1/2)a$ : [1 e 2 positivos (ambos naturais)] [Suponha que  $1/2 < 0$ . Como  $(1/2) \cdot 2 = 1$ , 2.1.7(c) implicaria  $1 < 0$ ] [Aplique 2.1.7(c) para concluir que  $(1/2)a > 0$ ]

$(1/2)a < a$ : [ $a > 0 \xrightarrow{(1)} a + a = 2a > a \xrightarrow{(2)} 2a - a > 0 \xrightarrow{(3)} a - (1/2)a > 0 \xrightarrow{(4)} a > (1/2)a$ ]

(1) 2.1.7(b) (2) 2.1.6(a) (3) 2.1.7(c) [" $\times(1/2)$ " e 2.1.1] (4) 2.1.6(a)

O fato de que  $\mathbb{P}$  não possui elemento mínimo é generalizado no próximo teorema, o qual pode ser útil para estabelecer que um dado número é igual a 0.

**Teorema 2.1.9** Se  $a \in \mathbb{R}$  e  $0 \leq a < \varepsilon$  para todo  $\varepsilon > 0$ , então  $a = 0$ .

**Prova.** A prova será feita por contraposição. Suponha que  $a \neq 0$ . Se  $a < 0$ , então a desigualdade  $0 \leq a$  é desrespeitada. Se  $a > 0$ , então defina  $\varepsilon_0 = (1/2)a$ . Como  $(1/2)a < a$ , a condição  $a < \varepsilon$  para todo  $\varepsilon > 0$  não se verifica.  $\square$

- Teorema 2.1.10 e Corolário 2.1.11: ler.

## Desigualdades

---

- Exemplos 2.1.12 e 2.1.13: ler.

**Exemplo 2.1.13 (c) A desigualdade de Bernoulli** Se  $x > -1$ , então

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx, \quad (4)$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Aplicaremos o Princípio da Indução. Claramente, (4) é respeitada para  $n = 1$ . Suponha agora que a desigualdade em questão se verifica para um  $n$  genérico. Utilize o fato que  $1 + x$  é positivo para concluir que

$$(1 + x)^{n+1} \geq (1 + nx)(1 + x) = 1 + x + nx + nx^2 = 1 + (n + 1)x + nx^2 \geq 1 + (n + 1)x.$$

Assim sendo,  $(1 + x)^{n+1} \geq 1 + (n + 1)x$ .  $\square$

## 2.2 Valor Absoluto e a Linha Reta

**Definição 2.2.1** O valor absoluto do número real  $a$ , denotado por  $|a|$ , é dado por

$$|a| = \begin{cases} a & \text{se } a > 0, \\ 0 & \text{se } a = 0, \\ -a & \text{se } a < 0. \end{cases} \quad (2.2)$$

Por exemplo,  $|5| = 5$  e  $|-8| = 8$ . Observe que  $|a| \geq 0$  e  $|a| = |-a|$  para todo  $a$ ; adicionalmente,  $|a| = 0$  se e somente se  $a = 0$ .

**Teorema 2.2.2 (a)**  $|ab| = |a||b|$ , para todo  $a$  e todo  $b$  em  $\mathbb{R}$ .

**(b)**  $|a|^2 = a^2$ , para todo  $a$  em  $\mathbb{R}$ .

**(c)** Se  $c \geq 0$ , então  $|a| \leq c$  se e somente se  $-c \leq a \leq c$ .

**(d)**  $-|a| \leq a \leq |a|$ , para todo  $a$  em  $\mathbb{R}$ .

**Prova.** Considere o item (a). Suponha que  $a = 0$  ou  $b = 0$ . Logo,  $|ab| = |0| = 0$ , ao passo que  $|a||b|$  também é igual a 0. Existem três outros casos a serem considerados: (i)  $a > 0$  e  $b > 0$ ; (ii)  $a > 0$  e  $b < 0$  e (iii)  $a < 0$  e  $b < 0$ . Se (i) se verifica, então  $ab > 0$ ; consequentemente,  $|ab| = ab$ . Adicionalmente,  $|a| = a$  e  $|b| = b$ ; logo,  $|a||b| = ab$ . Assim sendo,  $|ab| = |a||b|$ . Suponha agora que (ii) se verifica. Desta forma,  $ab < 0$ , de onde se conclui que  $|ab| = -ab$ . Por outro lado,  $|a||b| = a \cdot (-b) = -ab$ . Por fim, se (iii) se verifica, então  $ab > 0$ , o que implica que  $|ab| = ab$ . Ademais,  $|a| = -a$  e  $|b| = -b$ ; assim sendo,  $|a||b| = (-a) \cdot (-b) = ab$ .

No tocante ao item (b), lembre que  $a^2 \geq 0$ . Logo,  $a^2 = |a^2|$ . Todavia, o item (a) implica que  $|a^2| = |a|^2$ . Desta forma,  $a^2 = |a|^2$ .

Discute-se agora o item (c). Seja  $c$  um real não negativo. Considere a parte “somente se” da afirmativa. Assuma que  $|a| \leq c$ . Se  $a \geq 0$ , então  $|a| = a$ ; logo,  $a \leq c$ . Adicionalmente, é trivialmente verdade que  $a \geq -c$ . Combine as duas últimas desigualdades para obter o resultado desejado. Se  $a < 0$ , então  $|a| = -a$ . Assim sendo,  $-a \leq c$ , o que implica que  $a \geq -c$ . Ademais, a desigualdade  $a \leq c$  é trivialmente satisfeita. Mais uma vez, combine as duas desigualdades mais recentes para concluir que  $-c \leq a \leq c$ . Para estabelecer a parte “se”, assumamos que  $-c \leq a \leq c$ . Logo, ambas as desigualdades  $-a \leq c$  e  $a \leq c$  são satisfeitas. Como (2.2) implica que  $|a|$  é igual a  $a$  ou 0 ou  $-a$ ,  $|a| \leq c$ .

Para estabelecer a afirmativa (d) é suficiente fazer  $c = |a|$  e aplicar a parte “somente se” da afirmativa (c).  $\square$

**Teorema 2.2.3 (Desigualdade Triangular)** Se  $a$  e  $b$  pertencem a  $\mathbb{R}$ , então  $|a + b| \leq |a| + |b|$ .

**Prova.** A desigualdade em questão decorre do Teorema 2.2.2. Primeiro, utilize (d) para concluir que

$$-|a| \leq a \leq |a| \quad \& \quad -|b| \leq b \leq |b| \Rightarrow -(|a| + |b|) \leq a + b \leq |a| + |b|.$$

Agora, observe que (c) implica que  $|a + b| \leq |a| + |b|$ . □

**Corolário 2.2.4** Se  $a$  e  $b$  pertencem a  $\mathbb{R}$ , então

(a)  $||a| - |b|| \leq |a - b|,$

(b)  $|a - b| \leq |a| + |b|.$

**Prova (esboço).** (a)  $[a = a - b + b \Rightarrow |a| = |(a - b) + b| \leq |(a - b)| + |b| \Rightarrow |a| - |b| \leq |a - b|]$   
 $[b = b - a + a \Rightarrow |b| = |b - a + a| \leq |b - a| + |a| \Rightarrow -|a - b| = -|b - a| \leq |a| - |b|]$

Aplique 2.2.2(c).

(b) Substitua  $b$  por  $-b$  na Desigualdade Triangular. □

**Corolário 2.2.5** Se  $a_1, a_2, \dots, a_n$  são números reais, então  $|\sum_{i=1}^n a_i| \leq \sum_{i=1}^n |a_i|.$

**Exemplos 2.2.6 (a)** Determine o conjunto  $A$  dos números reais  $x$  que satisfazem a condição  $|2x + 3| < 7$ .

$$\begin{aligned} |2x + 3| < 7 &\iff -7 < 2x + 3 < 7 \iff -10 < 2x < 4 \iff -5 < x < 2 \\ A &= \{x \in \mathbb{R} : -5 < x < 2\} \end{aligned}$$

(b) Determine o conjunto  $B$  dos números reais  $x$  que satisfazem

$$|x - 1| < |x|. \tag{2.3}$$

*Abordagem 1* Identificar uma forma de “remover” os sinais de valor absoluto.

Lado direito:  $x \geq 0 \implies |x| = x; x < 0 \implies |x| = -x$

Lado esquerdo:  $x \geq 1 \implies |x - 1| = x - 1; x < 1 \implies |x - 1| = 1 - x$

caso (i):  $x \geq 1$

$$|x - 1| < |x| \iff x - 1 < x \iff -1 < 0$$

Logo, (2.3) é satisfeita para todo  $x \geq 1$ .

caso (ii):  $x < 1$  e  $x \geq 0$

$$|x - 1| < |x| \iff 1 - x < x \iff 1 < 2x \iff x > 1/2$$

Logo, (2.3) é satisfeita para  $1/2 < x < 1$ .

caso (iii):  $x < 0$

$$|x - 1| < |x| \iff 1 - x < -x \iff 1 < 0$$

Logo, (2.3) não é satisfeita para  $x < 0$ .

Conclusão:  $B = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1 \text{ ou } 1/2 < x < 1\} = \{x \in \mathbb{R} : x > 1/2\}$ .

*Abordagem 2* Utilizar o fato que se  $a \geq 0$  e  $b \geq 0$ , então

$$a < b \iff a^2 < b^2. \quad (2.4)$$

$$|x-1| < |x| \iff |x-1|^2 < |x|^2 \iff (x-1)^2 < x^2 \iff x^2 - 2x + 1 < x^2 \iff x > 1/2$$

*Observação* Sim, (2.4) está correta. Assuma que  $a \geq 0$  e  $b \geq 0$ .

$$\begin{aligned} 0 &\leq a < b \Rightarrow a^2 \leq ab \text{ \& } ab < b^2 \Rightarrow a^2 < b^2 \\ a &\geq b \geq 0 \Rightarrow a^2 \geq ab \text{ \& } ab \geq b^2 \Rightarrow a^2 \geq b^2 \end{aligned}$$

(c) Seja  $A$  o conjunto  $\{x \in \mathbb{R} : 2 \leq x \leq 3\}$  e  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  a função definida por  $f(x) = (2x^2 + 3x + 1)/(2x - 1)$ . Ache um número real  $M$  tal que  $|f(x)| \leq M$  para todo  $x \in A$ .

$$|2x^2 + 3x + 1| \leq 2|x^2| + 3|x| + 1 \leq 2 \times 9 + 3 \times 3 + 1 = 28$$

Adicionalmente,  $[2x - 1 < 0 \iff x < 1/2]$ . Logo,  $2x - 1 > 0$  para todo  $x \in A$ .

$$|2x - 1| = 2x - 1 \geq 2 \times 2 - 1 = 3$$

Desta forma, é suficiente fazer  $M = 28/3$ . Comentários: qualquer número maior que  $28/3...$ ; provavelmente  $28/3$  não é o menor valor possível.  $\square$

## A Linha Reta

O conceito de valor absoluto está associado à noção de distância; ver Figura 2.2.1 (p. 33).

**Definição 2.2.7** Sejam  $a$  e  $\varepsilon$  dois números reais, sendo que  $\varepsilon > 0$ . A *vizinhança- $\varepsilon$*  de  $a$  é o conjunto  $V_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \varepsilon\}$ .

Observe que

$$x \in V_\varepsilon(a) \iff -\varepsilon < x - a < \varepsilon \iff a - \varepsilon < x < a + \varepsilon;$$

ver Figura 2.2.2 (p. 33).

**Teorema 2.2.8** *Seja  $a$  um número real. Se  $x \in V_\varepsilon(a)$  para todo  $\varepsilon > 0$ , então  $x = a$ .*

**Prova.** Se  $|x - a| < \varepsilon$  para todo  $\varepsilon > 0$ , então o Teorema 2.1.9 implica que  $|x - a| = 0$ . Assim sendo,  $x = a$ .  $\square$

**Exemplos 2.2.9 (a)** Seja  $U$  o conjunto  $\{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}$ . Para  $a \in U$ , defina  $\varepsilon = \min\{a, 1 - a\}$ . Mostre que  $V_\varepsilon(a) \subseteq U$  (consequentemente, para todo  $x \in U$  existe uma vizinhança- $\varepsilon$  de  $x$  contida em  $U$ ).

Há dois casos a considerar: (i)  $a \geq 1 - a$  e (ii)  $a < 1 - a$ . Caso (i)

$$\begin{aligned} x \in V_\varepsilon(a) &\Rightarrow |x - a| < \min\{a, 1 - a\} = 1 - a \Rightarrow \\ -(1 - a) &< x - a < 1 - a \Rightarrow a - (1 - a) < x < 1 \Rightarrow 0 < x < 1 \end{aligned}$$

Obs.:  $a \geq 1 - a \Rightarrow 0 \leq a - (1 - a)$ .

Caso (ii)

$$\begin{aligned} x \in V_\varepsilon(a) &\Rightarrow |x - a| < \min\{a, 1 - a\} = a \Rightarrow \\ -a &< x - a < a \Rightarrow 0 < x < 2a \Rightarrow 0 < x < 1 \end{aligned}$$

Obs.:  $a < 1 - a \Rightarrow 2a < 1$ .

**(b)** Seja  $I$  o conjunto  $\{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\}$ . Para qualquer  $\varepsilon > 0$ ,  $V_\varepsilon(0)$  contém pontos que não pertencem a  $I$ . Por exemplo,  $-\varepsilon/2$  pertence a  $V_\varepsilon(0)$  e não pertence a  $I$ .

**(c)** Se  $|x - a| < \varepsilon$  e  $|y - b| < \varepsilon$ , então a Desigualdade Triangular implica que

$$|(x + y) - (a + b)| = |(x - a) + (y - b)| \leq |x - a| + |y - b| < 2\varepsilon.$$

Assim sendo,  $x + y \in V_{2\varepsilon}(a + b)$ . Entretanto, não se pode afirmar que  $x + y$  pertence a  $V_\varepsilon(a + b)$ . Exemplo:  $a = 1$ ,  $b = -1$ ,  $\varepsilon = 3/8$ ,  $x = 10/8$  e  $y = -6/8$ .

$$\begin{aligned} |x - a| &= \frac{2}{8} \Rightarrow x \in V_{\frac{3}{8}}(a) \\ |y - b| &= \frac{2}{8} \Rightarrow y \in V_{\frac{3}{8}}(b) \\ |(x + y) - (a + b)| &= \frac{4}{8} \Rightarrow x + y \notin V_{\frac{3}{8}}(a + b) \quad \square \end{aligned}$$

## 2.3 A Propriedade de Completude de $\mathbb{R}$

Os conjuntos  $\mathbb{Q}$  e  $\mathbb{R}$  possuem as mesmas propriedades algébricas e de ordem. Todavia, ao contrário de  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$  possui a propriedade de ser completo.

### Supremos e Ínfimos

**Definição 2.3.1** Seja  $S$  um subconjunto não vazio de  $\mathbb{R}$ .

**(a)** O conjunto  $S$  é dito ser **limitado superiormente** se existir  $u \in \mathbb{R}$  tal que  $s \leq u$  para todo  $s \in S$ . O número  $u$  é uma **cota superior** de  $S$ .

**(b)** O conjunto  $S$  é dito ser **limitado inferiormente** se existir  $w \in \mathbb{R}$  tal que  $w \leq s$



para todo  $s \in S$ . O número  $w$  é uma **cota inferior** de  $S$ .

(c) O conjunto  $S$  é dito ser **limitado** se ele for limitado superior e inferiormente e **ilimitado** se ele não for limitado.

**Comentário** *bounded* e *limited* vs limitado

A título de ilustração, considere os conjuntos  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{N}$ ,  $S_1 = \{x \in \mathbb{R} : x < 2\}$ ,  $S_2 = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 10\}$  e  $S_3 = \{x \in \mathbb{R} : -2 < x < 8\}$ .  $\mathbb{R}$  é ilimitado (superior e inferiormente),  $\mathbb{N}$  é ilimitado (porém limitado inferiormente),  $S_1$  é ilimitado (porém limitado superiormente),  $S_2$  é ilimitado (porém limitado inferiormente) e  $S_3$  é limitado.

Se um conjunto  $S$  tem uma cota superior (inferior), então ele tem infinitas outras cotas superiores (inferiores); ver Figura 2.3.1 (p. 35).

**Definição 2.3.2** Seja  $S$  um subconjunto não vazio de  $\mathbb{R}$ .

(a) Se  $S$  é limitado superiormente, então um número  $u$  será o **supremo** (ou a **menor cota superior**) de  $S$  se ele satisfizer as seguintes duas condições: **(1)**  $u$  é uma cota superior de  $S$  e **(2)** se  $v$  é uma cota superior de  $S$ , então  $u \leq v$ .

(b) Se  $S$  é limitado inferiormente, então um número  $w$  será o **ínfimo** (ou a **maior cota inferior**) de  $S$  se ele satisfizer as seguintes duas condições: **(1')**  $w$  é uma cota inferior de  $S$  e **(2')** se  $t$  é uma cota inferior de  $S$ , então  $t \leq w$ .

Nem todo conjunto tem supremo e/ou ínfimo. Por exemplo, o ínfimo do conjunto  $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$  é igual a 0. Contudo, esse mesmo conjunto não tem supremo.

Um dado conjunto  $S$  tem no máximo um supremo, pois se  $u_1$  e  $u_2$  são cotas superiores de  $S$  e  $u_1 < u_2$ , então  $u_2$  não pode ser a menor cota superior. Similarmente, o ínfimo também é único.

As notações  $\sup S$  e  $\inf S$  são bastante populares.

**Lema 2.3.3** Um número  $u$  é o supremo de um conjunto não vazio  $S \subseteq \mathbb{R}$  se e somente se  $u$  satisfaz às seguintes condições: **(1)**  $s \leq u$  para todo  $s \in S$  e **(2)** se  $v < u$ , então existe  $s' \in S$  tal que  $v < s'$ .

**Prova.** Começaremos pela parte “se”. A condição (1) implica que  $u$  é uma cota superior de  $S$ . Adicionalmente, a condição (2) implica que qualquer número menor que  $u$  não é uma cota superior de  $S$ ; desta forma,  $u$  é a menor cota superior de  $S$ .

Considere agora a parte “somente se”. Se  $u$  é o supremo de  $S$ , então  $u$  é uma cota superior de  $S$ . Assim sendo,  $u$  satisfaz à condição (1). A veracidade da condição (2) será estabelecida por contraposição. Suponha que ela não se verifique. Logo, existe um número  $v_0 < u$  tal que  $s \leq v_0$  para todo  $s \in S$ . Contudo, isto implica que  $v_0$  é uma cota superior de  $S$ . Como  $v_0 < u$ ,  $u$  não é a menor cota superior de  $S$ . Logo,  $u$  não é o supremo de  $S$ .  $\square$

**Lema 2.3.4** Uma cota superior  $u$  de um conjunto não vazio  $S \subseteq \mathbb{R}$  é o supremo de  $S$  se e somente se para todo  $\varepsilon > 0$  existir um  $s_\varepsilon \in S$  tal que  $u - \varepsilon < s_\varepsilon$ .

Ver Figura 2.3.2 (p. 37).

É importante ter em mente que o supremo de um conjunto pode ou não pertencer ao conjunto em questão.

**Exemplos 2.3.5 (a)** Suponha que  $S_1 \subseteq \mathbb{R}$  é um conjunto finito e não vazio. O seu supremo é igual ao seu maior elemento, ao passo que o seu ínfimo é igual ao seu menor elemento.

**(b)** Considere o conjunto  $S_2 = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\}$ . Claramente, 1 é uma cota superior de  $S_2$ . Por outro lado, se  $v < 1$ , então existe  $s' \in S_2$  tal  $v < s'$  (por exemplo,  $s' = 1$ ). Logo,  $\sup S_2 = 1$ . Abordagem similar estabelece que  $\inf S_2 = 0$ . Observe que ambos  $\sup S_2$  e  $\inf S_2$  pertencem a  $S_2$ .

**(c)** Considere o conjunto  $S_3 = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}$ . Assim como no item anterior, 1 é uma cota superior de  $S_3$ . Suponha que  $v < 1$ . Se  $v < 0$ , então ele claramente não é uma cota superior de  $S_3$  e por tal motivo não pode ser o seu supremo. Se  $v \geq 0$ , então faça  $s' = v + (1 - v)/2$ . Observe que  $0 < s' < 1$ ; ou seja,  $s' \in S_3$ . Como  $s' > v$ ,  $v$  não é uma cota superior de  $S_3$ . Logo, 1 é a menor cota superior de  $S_3$ ; desta forma,  $\sup S_3 = 1$ . Raciocínio similar estabelece que  $\inf S_3 = 0$ .  $\square$

## A Propriedade de Completude de $\mathbb{R}$

**Axioma 2.3.6 (A Propriedade de Completude de  $\mathbb{R}$ )** Todo subconjunto não vazio de  $\mathbb{R}$  que possui uma cota superior também possui um supremo em  $\mathbb{R}$ .

- Também conhecida como *Propriedade do Supremo de  $\mathbb{R}$*  (*Supremum Property of  $\mathbb{R}$*  em inglês).
- Axioma para nós; em abordagens mais sofisticadas essa propriedade é um teorema.
- Intuição: não há buracos (*gaps*) na linha reta.
- Ver apêndice.

## 2.4 Aplicações da Propriedade do Supremo

**Exemplos 2.4.1 (a)** É importante que o supremo e o ínfimo sejam compatíveis com as propriedades algébricas de  $\mathbb{R}$ . A título de ilustração, analisaremos a compatibilidade entre a operação de “tomar o supremo” e a soma. Sejam  $S \subseteq \mathbb{R}$  um conjunto não vazio

limitado superiormente e  $a$  um número real. Defina  $T_a = \{a + s : s \in S\}$ . Mostraremos que  $\sup T_a = a + \sup S$ . Observe que  $a + \sup S$  é uma cota superior de  $T_a$ , pois

$$\sup S \geq s, \forall s \in S \Rightarrow a + \sup S \geq a + s, \forall s \in S.$$

Seja  $x$  um real tal que  $x < a + \sup S$ . Assim sendo,

$$x - a < \sup S \Rightarrow \exists s \in S : x - a < s \Rightarrow \exists s \in S : x < a + s.$$

Logo,  $x$  não é uma cota superior de  $T_a$ .

(b) Se os supremos ou ínfimos de dois conjuntos estão sendo analisados, frequentemente é necessário aplicar um raciocínio de dois estágios. Por exemplo, sejam  $A$  e  $B$  dois subconjuntos de  $\mathbb{R}$ , ambos limitados, tais que

$$a \leq b, \forall a \in A, \forall b \in B. \quad (2.5)$$

Mostraremos que  $\sup A \leq \sup B$ . De fato, como  $b \leq \sup B$  para todo  $b \in B$ , (2.5) implica que  $a \leq \sup B$ , para todo  $a \in A$ . Desta forma,  $\sup B$  é uma cota superior de  $A$ . Como  $\sup A$  é a menor cota superior de  $A$ ,  $\sup A \leq \sup B$ .  $\square$

## Funções

Dada uma função  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ , nós afirmamos que  $f$  é *limitada superiormente* se o conjunto  $f(D) = \{f(x) : x \in D\}$  é limitado superiormente. As expressões *limitada inferiormente* e *limitada* são definidas de forma similar. Observe que  $f$  é limitada se e somente se existir  $B \in \mathbb{R}$  tal que  $|f(x)| \leq B$  para todo  $x \in D$ . Esboço da prova:

$$|f(x)| \leq B \Rightarrow -B \leq f(x) \leq B$$

$$b_1 \leq f(x) \leq b_2 \Rightarrow -|b_1| \leq f(x) \leq |b_2| \xrightarrow{*} -B \leq f(x) \leq B \Rightarrow |f(x)| \leq B$$

\* Defina  $B = \max\{|b_1|, |b_2|\}$ .

**Exemplo 2.4.2** Sejam  $f$  e  $g$  duas funções com domínio  $D$  que assumem valores em  $\mathbb{R}$ . Suponha que  $f$  e  $g$  são limitadas.

(a) Se  $f(x) \leq g(x)$  para todo  $x \in D$ , então  $\sup f(D) \leq \sup g(D)$ . Para estabelecer esse fato, utilize o raciocínio adotado em 2.4.1(b). Observação:  $\sup f(D)$  também é denotado por

$$\sup_{x \in D} f(x), \sup_x f(x) \text{ e } \sup f.$$

(b) As hipóteses adotadas no item anterior não permitem que se estabeleça alguma relação entre  $\sup f(D)$  e  $\inf g(D)$ . A título de ilustração, assumamos que  $f(x) = x^2$ ,  $g(x) = x$  e  $D = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\}$ . Logo,  $\sup f = 1 > 0 = \inf g$ .

(c) Suponha que  $f(x) \leq g(y)$  para todo  $x \in D$  e todo  $y \in D$ . É possível mostrar que  $\sup f(D) \leq \inf g(D)$ .  $\square$

## A Propriedade de Arquimedes

---

**Teorema 2.4.3 (A Propriedade de Arquimedes)** Se  $x \in \mathbb{R}$ , então existe  $n_x \in \mathbb{N}$  tal que  $x < n_x$ .

**Prova.** Dado um número real  $x$ , suponha que não exista  $n_x$  com a propriedade desejada. Assim sendo,  $x \geq n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ ; conseqüentemente,  $x$  é uma cota superior de  $\mathbb{N}$ . Desta forma, 2.3.6 implica que  $\mathbb{N}$  possui um supremo  $u \in \mathbb{R}$ . Observe que  $u - 1$  não pode ser uma cota superior de  $\mathbb{N}$ . Logo, existe  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $u - 1 < m$ . Todavia, essa desigualdade é equivalente a  $u < m + 1$  e  $m + 1$  também pertence a  $\mathbb{N}$ . Contudo, isso viola a hipótese de que  $u$  é o supremo de  $\mathbb{N}$ .  $\square$

**Corolário 2.4.4** Se  $S = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ , então  $\inf S = 0$ .

**Corolário 2.4.5** Se  $t > 0$ , então existe  $n_t \in \mathbb{N}$  tal que  $0 < 1/n_t < t$ .

**Corolário 2.4.6** Se  $y > 0$ , então existe  $n_y \in \mathbb{N}$  tal que  $n_y - 1 \leq y < n_y$ .

## A existência de $\sqrt{2}$

---

**Teorema 2.4.7** Existe um número real positivo  $x$  tal que  $x^2 = 2$ .

**Prova.** Defina  $S = \{s \in \mathbb{R} : s \geq 0 \text{ e } s^2 < 2\}$ . Como  $1 \in S$ ,  $S$  não é vazio. Adicionalmente,

$$s \in S \Rightarrow s^2 < 9 \Rightarrow s < 3.$$

Logo,  $S$  é limitado superiormente. Assim sendo,  $S$  possui um supremo, o qual doravante será denotado por  $x$ . Provaremos que  $x^2 = 2$  mostrando a impossibilidade dos casos (i)  $x^2 < 2$  e (ii)  $x^2 > 2$ .

Considere o caso (i). Seja  $y$  qualquer real positivo que satisfaz  $y^2 < 2$ . Seja  $n$  um natural que satisfaz  $n > (2y + 1)/(2 - y^2)$ . Desta forma,

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} < \frac{2 - y^2}{2y + 1} &\Rightarrow \frac{2y}{n} + \frac{1}{n} < 2 - y^2 \Rightarrow y^2 + \frac{2y}{n} + \frac{1}{n} < 2 \Rightarrow \\ y^2 + \frac{2y}{n} + \frac{1}{n^2} < 2 &\Rightarrow \left(y + \frac{1}{n}\right)^2 < 2. \end{aligned}$$

Logo,  $(y + 1/n) \in S$ . Tendo em vista que  $y < (y + 1/n)$ ,  $y$  não é o supremo de  $S$ .

Adota-se raciocínio similar no caso (ii). Seja,  $y$  qualquer real positivo que satisfaz  $y^2 > 2$  e  $n$  um natural tal que  $n > 2y/(y^2 - 2)$ . Assim sendo,

$$\frac{1}{n} < \frac{y^2 - 2}{2y} \Rightarrow \frac{2y}{n} < y^2 - 2 \Rightarrow 2 < y^2 - \frac{2y}{n} < y^2 - \frac{2y}{n} + \frac{1}{n^2} = \left(y - \frac{1}{n}\right)^2.$$

Desta forma, se  $s \in S$ , então

$$s^2 < 2 < \left(y - \frac{1}{n}\right)^2 \Rightarrow s < y - \frac{1}{n}.$$

Logo,  $(y - 1/n)$  é uma cota superior de  $S$ . Como  $(y - 1/n) < y$ ,  $y \neq \sup S$ .  $\square$

**Comentários** (1) Abordagem similar estabelece a existência de outros números reais. (2) Considere o conjunto  $T = \{t \in \mathbb{Q} : t \geq 0 \text{ e } t^2 < 2\}$ . Se assumíssemos que  $\mathbb{Q}$  é completo (no sentido do Axioma 2.3.6), então poderíamos utilizar a prova acima para estabelecer que existe  $y \in \mathbb{Q}$  tal que  $y^2 = 2$ . Contudo, já mostramos que não existe um racional com essa propriedade. Logo, conclui-se que o conjunto  $\mathbb{Q}$  não é completo.

## A Densidade dos Números Racionais em $\mathbb{R}$

**Teorema 2.4.8** Se  $x$  e  $y$  são números reais que satisfazem  $x < y$ , então existe um número  $r \in \mathbb{Q}$  tal que  $x < r < y$ .

**Prova.** Inicialmente, assumamos que  $x > 0$ . Como  $y - x > 0$ , o Corolário 2.4.5 implica que existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $0 < 1/n < y - x$ . Logo,  $nx + 1 < ny$ . Aplique o Corolário 2.4.6 para concluir que existe  $m \in \mathbb{N}$  que satisfaz  $m - 1 \leq nx < m$ ; observe que  $m \leq nx + 1$ . Desta forma,

$$nx < m \leq nx + 1 < ny \Rightarrow nx < m < ny \Rightarrow x < m/n < y.$$

Como  $m/n \in \mathbb{Q}$ , temos o resultado desejado.

Resta considerar o caso em que  $x \leq 0$ . Se  $x = 0$ , então  $y > 0$ . Logo, basta aplicar o Corolário 2.4.5 para concluir que existe  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $x = 0 < 1/m < y$ . Assuma agora que  $x < 0$ . Se  $y > 0$ , então  $x < 0 < y$ . Se  $y = 0$ , então existe  $m' \in \mathbb{N}$  que satisfaz  $y = 0 < 1/m' < -x$ , o que implica que  $x < -1/m' < y$ . Por fim, Se  $x < 0$  e  $y < 0$ , então o parágrafo anterior estabelece que existe  $r \in \mathbb{Q}$  com a propriedade que  $-y < r < -x$ . Assim sendo,  $x < -r < y$ .  $\square$

**Corolário 2.4.9** Se  $x$  e  $y$  são números reais que satisfazem  $x < y$ , então existe um número irracional  $z$  tal que  $x < z < y$ .

**Comentário** Se  $r \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$  e  $z = r\sqrt{2}$ , então  $z$  é irracional. Caso contrário, teríamos inteiros  $p_z, q_z, p_r$  e  $q_r$ , todos diferentes de 0, tais que

$$\frac{p_z}{q_z} = \frac{p_r}{q_r} \sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{2} = \frac{p_z q_r}{q_z p_r},$$

de onde se conclui que  $\sqrt{2}$  seria um número racional. Evidentemente, é possível substituir  $\sqrt{2}$  por um irracional qualquer e obter uma conclusão similar.

## 2.5 Intervalos

Sejam  $a$  e  $b$  dois reais que satisfazem  $a < b$ . O **intervalo aberto** determinado por  $a$  e  $b$  é o conjunto  $\{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ . Esse conjunto é usualmente denotado por  $(a, b)$ . Observe que, em tal contexto,  $(a, b)$  não é um elemento de  $\mathbb{R}^2$ . Os números  $a$  e  $b$  são denominados de **extremos**. Listam-se a seguir outros tipos de intervalos:

**intervalo fechado**  $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ ;

**intervalos semiabertos** (ou **semifechados**)  $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$  e  $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ ;

**intervalos abertos infinitos**  $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$  e  $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$ ;

**intervalos fechados infinitos**  $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$  e  $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$ .

Observe que  $\infty$  e  $-\infty$  não são elementos de  $\mathbb{R}$ . No caso dos intervalos aberto, fechado e semiabertos, a diferença  $b - a$  corresponde ao **comprimento** do intervalo. Vale ressaltar que  $(a, a) = \emptyset$ ,  $[a, a] = \{a\}$  e  $(a, a] = [a, a) = \emptyset$ .

### Caracterização dos Intervalos

---

**Teorema 2.5.1 (Caracterização dos Intervalos)** Se  $S$  é um subconjunto de  $\mathbb{R}$  que contém pelo menos dois elementos e tem a propriedade

$$x, y \in S \ \& \ x < y \Rightarrow [x, y] \subseteq S, \quad (1)$$

então  $S$  é um intervalo.

**Prova.** Há quatro casos a serem considerados: (i)  $S$  é limitado, (ii)  $S$  é limitado superiormente mas não inferiormente, (iii)  $S$  é limitado inferiormente mas não superiormente e (iv)  $S$  é ilimitado superior e inferiormente.

Considere inicialmente o caso (i). Sejam  $a$  e  $b$ , respectivamente, o ínfimo e o supremo de  $S$ . Logo,  $S \subseteq [a, b]$ . Mostraremos que  $(a, b) \subseteq S$ . Seja  $z$  um elemento qualquer de  $(a, b)$ . Observe que  $z$  não é uma cota inferior de  $S$ . Desta forma, existe  $x \in S$  tal que  $x < z$ . Similarmente, o fato de  $z$  não ser uma cota superior de  $S$  implica que  $z < y$  para algum  $y \in S$ . Assim sendo,  $z \in [x, y]$ . Aplique a propriedade (1) para concluir que  $z \in S$ . Podemos então concluir que os únicos elementos de  $[a, b]$  que podem não pertencer a  $S$  são justamente os extremos  $a$  e  $b$ . Logo,  $S$  é um intervalo.

Analisaremos agora o caso (ii). Seja  $b$  o supremo de  $S$ . Por tal motivo,  $S \subseteq (-\infty, b]$ . Mostraremos que  $(-\infty, b) \subseteq S$ . Selecione qualquer elemento  $z$  de  $(-\infty, b)$ . Como  $z < b$ , existem números  $x$  e  $y$ , com  $x < y$ , pertencentes a  $S$  tais que  $z \in [x, y]$ . Aplique (1) para concluir que  $z \in S$ . Desta forma,  $b$  é o único elemento de  $(-\infty, b]$  que talvez não pertença a  $S$ . Isto implica que  $S = (-\infty, b]$  ou  $S = (-\infty, b)$ . Logo,  $S$  é um intervalo.

Considere agora o caso (iii). Seja  $a$  o ínfimo de  $S$ . Se  $z \in (a, \infty)$ , então há números  $x$  e  $y$ , com  $x < y$ , pertencentes a  $S$  tais que  $z \in [x, y]$ . A propriedade (1) implica que  $z \in S$ . Desta forma,  $(a, \infty) \subseteq S \subseteq [a, \infty)$ . Assim sendo,  $S$  é igual a  $(a, \infty)$  ou a  $[a, \infty)$ .

Por fim, considere o caso (iv). Seja  $z$  um real qualquer. Logo, existem  $x$  e  $y$  em  $S$  tais que  $z \in [x, y]$ . Mais uma vez, (1) implica que  $z \in S$ . Desta forma,  $S = \mathbb{R}$ .  $\square$

### 2.5.1 Intervalos Aninhados

Uma sequência  $I_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , de intervalos é dita ser **aninhada** se  $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \cdots \supseteq I_n \supseteq I_{n+1} \supseteq \cdots$ ; ver Figura 2.5.1 (p. 46). Por exemplo, as três sequências  $I_n = [0, 1/n]$ ,  $J_n = (0, 1/n)$  e  $K_n = (n, \infty)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , são aninhadas. É possível mostrar que  $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{0\}$ ,  $\bigcap_{n=1}^{\infty} J_n = \emptyset$  e  $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = \emptyset$ .

**Teorema 2.5.2 (Propriedade dos Intervalos Aninhados)** Se  $I_n = [a_n, b_n]$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , é uma sequência aninhada de intervalos fechados e limitados, então existe um número  $\gamma \in I_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

**Prova.** Como  $I_n \subseteq I_1$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_n \leq b_1$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Assim sendo, o conjunto  $\{a_k : k \in \mathbb{N}\}$  é limitado superiormente. Seja  $\gamma$  o seu supremo. Claramente,  $\gamma \geq a_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Mostraremos agora que  $\gamma \leq b_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Fixe  $m \in \mathbb{N}$  e considere o conjunto  $\{a_k : k \in \mathbb{N}\}$ . Seja  $k$  é um natural qualquer. Suponha que  $k \geq m$ . Logo,  $I_k \subseteq I_m$ , o que implica  $a_k \leq b_k \leq b_m$ . Assuma agora que  $k < m$ . Nesse caso,  $I_m \subseteq I_k$ . Desta forma,  $a_k \leq b_m$ . Como  $m$  pode ser qualquer número natural,  $a_k \leq b_m$  para quaisquer  $k$  e  $m$  naturais. Logo,  $b_m$  é uma cota superior de  $\{a_k : k \in \mathbb{N}\}$ . Como  $\gamma$  é a menor cota superior desse conjunto,  $\gamma \leq b_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Por fim, como  $a_n \leq \gamma \leq b_n$ ,  $\gamma \in I_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .  $\square$

**Teorema 2.5.3** Se  $I_n = [a_n, b_n]$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , é uma sequência aninhada de intervalos fechados e limitados tal que  $\inf\{b_n - a_n : n \in \mathbb{N}\} = 0$ , então o número  $\gamma \in I_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  é único.

## A Incontabilidade de $\mathbb{R}$

**Teorema 2.5.4** O conjunto  $\mathbb{R}$  é incontável.

**Prova.** É suficiente mostrar que o conjunto  $I = [0, 1]$  é incontável. A prova será feita por contradição. Assuma que  $I$  é contável. Logo, podemos enumerar os seus elementos e escrever  $I = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ . Seja  $I_1$  um intervalo fechado contido em  $I$  tal que  $x_1 \notin I_1$ . Em seguida, selecione um intervalo fechado  $I_2 \subseteq I_1$  tal que  $x_2 \notin I_2$ . Repita esse procedimento de forma a ter uma sequência aninhada  $I_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , tal que  $x_n \notin I_n$  para todo  $n$ . Agora, observe que

$$x_n \notin \bigcap_{k=1}^{\infty} I_k, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcap_{k=1}^{\infty} I_k = \emptyset.$$

Como a última igualdade contradiz o Teorema 2.5.2, o conjunto  $I$  não pode ser contável.  $\square$

## Apêndice

Seja  $S \neq \emptyset$  um subconjunto qualquer de  $\mathbb{R}$ . Dado  $S$ , construa o conjunto  $T$  de forma que  $T = \{t \in \mathbb{R} : t = -s, s \in S\}$ .

**Proposição 1** Se  $S$  é limitado superiormente, então  $T$  é limitado inferiormente e  $\inf T = -\sup S$ .

**Prova.** Seja  $S$  um conjunto limitado superiormente e  $\bar{s}$  o seu supremo. Logo, para todo  $s \in S$ ,

$$s \leq \bar{s} \implies -\bar{s} \leq -s.$$

Isto implica que  $-\bar{s} \leq t$  para todo  $t \in T$ . Desta forma,  $-\bar{s}$  é uma cota inferior de  $T$ . Seja  $x$  qualquer número tal que  $x > -\bar{s}$ . Assim sendo,  $-x < \bar{s}$ . Por tal motivo, existe  $s_x \in S$  tal que  $-x < s_x$ . Logo,  $-s_x < x$ , sendo que  $-s_x \in T$ . Concluimos então que  $x$  não é uma cota inferior de  $T$ . Este último resultado implica que  $-\bar{s}$  é a maior cota inferior de  $T$ .  $\square$

**Corolário 1** Se  $S$  é limitado inferiormente, então  $T$  é limitado superiormente e  $\sup T = -\inf S$ .

Esboço da prova: mostre que  $T$  é limitado superiormente (logo, ele tem um supremo) e aplique a Proposição 1.

Combinado com o Axioma da Completude, o Corolário 1 implica que todo subconjunto não vazio de  $\mathbb{R}$  que possui uma cota inferior também possui um ínfimo em  $\mathbb{R}$ .

**Corolário 2** Se  $S$  é limitado, então: (i)  $T$  é limitado, (ii)  $\inf T = -\sup S$  e (iii)  $\sup T = -\inf S$ .

**Prova.** Combine a Proposição 1 com o Corolário 2 para obter o resultado desejado.  $\square$