

# ANÁLISE MATEMÁTICA PARA ECONOMISTAS: NOTAS DE AULA

Este documento consiste em notas de aula para o Capítulo 1 de Bartle & Sherbert (*Introduction to Real Analysis*. 3ª edição. Nova Iorque: John Wiley & Sons, 2000).

Elaboração: Alexandre B. Cunha

## 1 Preliminares

Os autores numeram as expressões, por capítulo, na forma (1), (2),... Quando houver uma expressão numerada dessa forma nas notas de aula, então isso significa que a expressão em questão (ou outra bem similar) aparece no livro-texto com o mesmo número. Uma expressão numerada na forma (X.1), (X.2),... ou não aparece no livro ou aparece mas não está numerada. Observe que  $X$  corresponde ao número do capítulo em estudo. Essa convenção se aplica para todas as notas de aula para Bartle & Sherbert.

### 1.1 Conjuntos e Funções

- notação

- $x \in A$ :  $x$  pertence a  $A$
- $x \notin A$ :  $x$  não pertence a  $A$
- $A \subseteq B$ :  $A$  é um subconjunto de  $B$
- $A \subset B$ :  $A$  é um subconjunto próprio de  $B$  ( $A \subseteq B$  e  $A \neq B$ )

**Definição 1.1.1** Os conjuntos  $A$  e  $B$  são **iguais**, e nós escrevemos  $A = B$ , se eles contêm os mesmos elementos.

**Comentário** Uso de “se” (*if*) em definições.

Para estabelecer que  $A$  e  $B$  são iguais, é suficiente mostrar que  $A \subseteq B$  e  $B \subseteq A$ . Ou seja,

$$A = B \iff [A \subseteq B \text{ \& } B \subseteq A].$$

Normalmente, um conjunto é definido ou se listando todos os seus elementos ou pela especificação de uma propriedade que determine os elementos do conjunto. Exemplo:

$$A = \{x \in S : P(x)\}.$$

Vale ressaltar que se  $S$  estiver claro em um dado contexto, então ele pode ser omitido.

Listam-se a seguir alguns conjuntos importantes.

Números naturais:  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ .

Números inteiros:  $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$ .

Números Racionais:  $\mathbb{Q} = \{m/n : m, n \in \mathbb{Z} \text{ e } n \neq 0\}$ .

Números reais:  $\mathbb{R}$  (será discutido em detalhes no capítulo 2).

**Exemplos 1.1.2 (a)**  $\{x \in \mathbb{N} : x^2 - 3x + 2 = 0\} = \{1, 2\}$

**(b)**  $\{2k : k \in \mathbb{N}\}$  (pares),  $\{2k - 1 : k \in \mathbb{N}\}$  (ímpares) □

## Operações com Conjuntos

---

**Definição 1.1.3 (a)** A **união** dos conjuntos  $A$  e  $B$  é o conjunto

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

**(b)** A **interseção** dos conjuntos  $A$  e  $B$  é o conjunto  $A \cap B = \{x : x \in A \text{ e } x \in B\}$ .

**(c)** O **complemento de  $B$  com relação a  $A$**  é o conjunto  $A \setminus B = \{x : x \in A \text{ e } x \notin B\}$ .

Figura 1.1.1 (p. 3).

Conjunto vazio:  $\emptyset$  ( $\{\}$  em alguns textos)

Os conjuntos  $A$  e  $B$  são disjuntos se  $A \cap B = \emptyset$ .

**Teorema 1.1.4 (Leis de DeMorgan)** Se  $A$ ,  $B$  e  $C$  são conjuntos, então:

**(a)**  $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ ;

**(b)**  $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ .

**Prova do item (a).** Mostraremos que  $A \setminus (B \cup C) \subseteq (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$  e  $(A \setminus B) \cap (A \setminus C) \subseteq A \setminus (B \cup C)$ . Seja  $x$  um elemento qualquer de  $A \setminus (B \cup C)$ . Logo,

$$\begin{aligned} x &\in A \text{ e } x \notin B \cup C \Rightarrow x \in A \text{ e } x \notin B \text{ e } x \notin C \Rightarrow \\ (x &\in A \text{ e } x \notin B) \text{ e } (x \in A \text{ e } x \notin C) \Rightarrow x \in A \setminus B \text{ e } x \in A \setminus C \Rightarrow \\ x &\in (A \setminus B) \cap (A \setminus C). \end{aligned}$$

Assim sendo,  $A \setminus (B \cup C) \subseteq (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ .

Com relação à outra inclusão, observe que

$$\begin{aligned} x &\in (A \setminus B) \cap (A \setminus C) \Rightarrow x \in A \setminus B \text{ e } x \in A \setminus C \Rightarrow \\ (x &\in A \text{ e } x \notin B) \text{ e } (x \in A \text{ e } x \notin C) \Rightarrow x \in A \text{ e } x \notin B \text{ e } x \notin C \Rightarrow \\ x &\in A \text{ e } x \notin B \cup C \Rightarrow x \in A \setminus (B \cup C). \end{aligned}$$

Desta forma,  $(A \setminus B) \cap (A \setminus C) \subseteq A \setminus (B \cup C)$ . □

*Unões e interseções com famílias de conjuntos* Considere a família  $\{A_1, A_2, A_3, \dots\}$ .

$$\begin{aligned} \bigcup_{n=1}^k A_n &= \{x : x \in A_n \text{ para algum } n \in \{1, 2, \dots, k\}\} \\ \bigcap_{n=1}^k A_n &= \{x : x \in A_n \text{ para todo } n \in \{1, 2, \dots, k\}\} \\ \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n &= \{x : x \in A_n \text{ para algum } n \in \mathbb{N}\} \\ \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n &= \{x : x \in A_n \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\} \end{aligned}$$

## Produtos Cartesianos

**Definição 1.1.5** Sejam  $A$  e  $B$  dois conjuntos não vazios. O **produto cartesiano**  $A \times B$  de  $A$  e  $B$  é o conjunto de todos os pares ordenados  $(a, b)$  tais que  $a \in A$  e  $b \in B$ . Isto é,

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}.$$

Por exemplo, se  $A = \{1, 2, 3\}$  e  $B = \{1, 5\}$ , então

$$A \times B = \{(1, 1), (1, 5), (2, 1), (2, 5), (3, 1), (3, 5)\}.$$

O conjunto  $\mathbb{R}^2$  também é um produto cartesiano.

Podemos agora discutir o conceito de *função*. No começo do século 19 a palavra função designava uma fórmula bem definida; por exemplo,  $f(x) = x^2 + 3x - 5$ . Contudo, os matemáticos desejavam ter um conceito mais geral. Adicionalmente, era necessário fazer uma distinção precisa entre a função propriamente dita e os seus valores. Assim sendo, uma definição alternativa seria a seguinte:

Uma função  $f$  do conjunto  $A$  no conjunto  $B$  é uma regra de correspondência que atribui a cada elemento  $x$  de  $A$  um único elemento  $f(x)$  em  $B$ .

Contudo, há um problema na definição acima: como interpretar a expressão *regra de correspondência*? Dito isto, apresenta-se a seguir uma definição mais precisa do conceito em questão.

**Definição 1.1.6** Sejam  $A$  e  $B$  dois conjuntos. Uma **função** de  $A$  em  $B$  é um conjunto  $f$  de pares ordenados em  $A \times B$  com a propriedade que para cada  $a \in A$  existe um único  $b \in B$  tal que  $(a, b) \in f$ .

**Comentários** (a) Se  $(a, b)$  e  $(a, b')$  pertencem a  $f$ , então  $b = b'$ . (b) Atenção ao trecho “para cada  $a \in A$ ”; todo elemento de  $A$ ...

A título de ilustração, considere os conjuntos  $A = \{a_1, a_2\}$  e  $B = \{b_1, b_2\}$ , onde  $a_1 \neq a_2$  e  $b_1 \neq b_2$ . Assim sendo,  $A \times B = \{(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_2, b_1), (a_2, b_2)\}$ . O conjunto  $f = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2)\}$  é uma função. O conjunto  $A \times B$  não é uma função; o mesmo vale para os conjuntos  $\{(a_1, b_1), (a_1, b_2)\}$ ,  $\{(a_1, b_2), (a_2, b_1), (a_2, b_2)\}$  e  $\{(a_2, b_2)\}$ .

O conjunto  $A$  é o **domínio** de  $f$  e também é denotado por  $D(f)$ , ao passo que o conjunto  $B$  é o **contradomínio** (*codomain* em inglês) de  $f$ . O conjunto  $R(f)$  de todas as segundas coordenadas dos elementos de  $f$  é chamado de **imagem** (*range* ou *image* em inglês). Observe que  $D(f) = A$ , enquanto pode ocorrer que  $R(f) \subset B$ . Adicionalmente,  $f(a)$  é o **valor** de  $f$  no ponto  $a$  (ou a **imagem** de  $a$  por  $f$ ). A representação  $f : A \rightarrow B$  é bastante comum.

## Transformações e Máquinas

---

Figuras 1.1.5 e 1.1.6 (p. 6).

## Imagem Direta e Imagem Inversa

---

Seja  $f : A \rightarrow B$  uma função.

**Definição 1.1.7** Se  $E$  é um subconjunto de  $A$ , então a **imagem direta** de  $E$  por  $f$  é o subconjunto  $f(E)$  de  $B$  dado por

$$f(E) = \{f(x) \in B : x \in E\}.$$

Se  $H$  é um subconjunto de  $B$ , então a **imagem inversa** de  $H$  por  $f$  é o subconjunto  $f^{-1}(H)$  de  $A$  dado por

$$f^{-1}(H) = \{x \in A : f(x) \in H\}.$$

**Comentário** No contexto dessa definição,  $f^{-1}$  não é a função inversa (que pode até não existir).

**Exemplos 1.1.8 (a)** Considere a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2$ . Sejam  $E$ ,  $G$  e  $H$  os conjuntos dados por  $E = \{x : 0 \leq x \leq 2\}$ ,  $G = \{y : 0 \leq y \leq 4\}$  e  $H = \{y : -1 \leq y \leq 1\}$ . Desta forma,  $f(E) = G$ ; por outro lado,  $f^{-1}(G) = \{x : -2 \leq x \leq 2\}$ . Assim sendo,  $f^{-1}(f(E)) \neq E$ . Contudo,  $f(f^{-1}(G)) = G$ . Ademais,  $f^{-1}(H) = \{x : -1 \leq x \leq 1\}$  e  $f(f^{-1}(H)) = \{y : 0 \leq y \leq 1\} \neq H$ . Convém esboçar um gráfico (identifique os conjuntos  $E$ ,  $f(E)$ ,  $f^{-1}(f(E))$ ,  $G$ ,  $f^{-1}(G)$ ,  $f(f^{-1}(G))$ ,  $H$ ,  $f^{-1}(H)$  e  $f(f^{-1}(H))$ ).

**(b)** Sejam  $f : A \rightarrow B$  uma função e  $G$  e  $H$  subconjuntos de  $B$ . Mostraremos que  $f^{-1}(G \cap H) \subseteq f^{-1}(G) \cap f^{-1}(H)$ . Suponha que  $x \in f^{-1}(G \cap H)$ . Logo,  $f(x) \in G \cap H$ . Assim sendo,  $f(x) \in G$  e  $f(x) \in H$ , de onde se conclui que  $x \in f^{-1}(G)$  e  $x \in f^{-1}(H)$ . Desta maneira,  $x \in f^{-1}(G) \cap f^{-1}(H)$ .  $\square$

## Tipos Especiais de Funções

**Definição 1.1.9** Seja  $f : A \rightarrow B$  uma função.

- (a)** A função  $f$  é dita ser **injetiva** se  $x_1 \neq x_2$  implica que  $f(x_1) \neq f(x_2)$ .
- (b)** A função  $f$  é dita ser **sobrejetiva** se  $f(A) = B$ ; ou seja, se  $R(f) = B$ .
- (c)** A função  $f$  é dita ser **bijetiva** se ela for injetiva e sobrejetiva.

Para mostrar que uma função  $f$  é injetiva, é preciso mostrar que para todo  $x_1, x_2$  em  $A$ ,

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Se  $A$  e  $B$  são subconjuntos de  $\mathbb{R}$  e  $f$  é injetiva, então o seu gráfico satisfaz o *primeiro teste da linha horizontal*: toda linha horizontal corta o gráfico de  $f$  no máximo uma vez. (Desenhar gráfico.)

Para mostrar que uma função  $f$  é sobrejetiva, é preciso mostrar que para todo  $b \in B$  existe  $x \in A$  tal que  $f(x) = b$ . Se  $A$  e  $B$  são subconjuntos de  $\mathbb{R}$  e  $f$  é sobrejetiva, então o seu gráfico satisfaz o *segundo teste da linha horizontal*: toda linha horizontal corta o gráfico de  $f$  pelo menos uma vez. (Desenhar gráfico.)

**Exemplo 1.1.10** Considere a função  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ , onde  $A = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 1\}$  e  $f(x) = 2x/(x-1)$ . Mostraremos que  $f$  é injetiva. Sejam  $x_1$  e  $x_2$  dois elementos de  $A$  tais que  $f(x_1) = f(x_2)$ . Desta forma,

$$\frac{2x_1}{x_1 - 1} = \frac{2x_2}{x_2 - 1} \Rightarrow x_1x_2 - x_1 = x_1x_2 - x_2 \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Essa função não é sobrejetiva, pois  $R(f) \neq \mathbb{R}$ . Para verificar tal fato, resolva a equação  $y = 2x/(x-1)$  para  $x$ . Esse procedimento estabelece que  $x = y/(y-2)$ . Logo, não existe  $x \in A$  tal que  $f(x) = 2$ . Assim sendo,  $2 \notin R(f)$ . Adicionalmente, para cada  $y \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ , existe exatamente um único  $x$  tal que  $f(x) = y$ . Assim sendo,  $R(f) = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ . Por fim, a função  $g : A \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{2\}$ , onde  $g(x) = f(x)$ , é uma bijeção.  $\square$

**Comentário** A função  $g$  acima é denotada por  $f$  no livro-texto.

## Funções Inversas

---

**Definição 1.1.11** Se  $f : A \rightarrow B$  é uma bijeção, então  $g = \{(b, a) \in B \times A : (a, b) \in f\}$  é uma função de  $B$  em  $A$ . Tal função é denominada a **função inversa** de  $f$  e é denotada por  $f^{-1}$ .

**Comentários** (a) Observe que  $D(f) = R(f^{-1})$ ,  $R(f) = D(f^{-1})$  e  $b = f(a)$  se e somente se  $a = f^{-1}(b)$ . A título de ilustração, considere a função  $g$  definida no fim do Exemplo 1.1.10. A sua função inversa é dada por  $g^{-1}(y) = y/(y - 2)$ . (b) Mesma notação ( $f^{-1}$ ) utilizada para função inversa e imagem inversa.

## Composição de Funções

---

Em contextos diversos, desejamos efetuar uma composição de funções. Ou seja, dada um ponto  $x$ , avalia-se  $f(x)$  e em seguida se avalia o valor de  $g$  no ponto  $f(x)$ . Por exemplo, a curva de oferta de uma firma competitiva é dada pela composição da sua função de produção com a demanda por insumos. Esboço:  $Y = F(L)$ ,  $L^D = h(W/P)$  e  $Y^S = F(h(W/P))$ .

**Definição 1.1.12** Sejam  $f : A \rightarrow B_1$  e  $g : B_2 \rightarrow C$  são duas funções tais que  $R(f) \subseteq B_2$ , então a **função composta**  $g \circ f$  é a função de  $A$  em  $C$  definida por  $(g \circ f)(x) = g(f(x))$  para todo  $x \in A$ .

**Comentários** (a) Definição do livro:  $f : A \rightarrow B$  e  $g : B \rightarrow C$ ; a definição acima é um pouco mais geral. (b) A passagem  $R(f) \subseteq D(g) = B$  na definição do livro é redundante.

**Exemplos 1.1.13** (a) A ordem da composição é relevante. Por exemplo, se  $f(x) = 2x$  e  $g(x) = 3x^2 - 1$ , então  $(g \circ f)(x) = 12x^2 - 1$  e  $(f \circ g)(x) = 6x^2 - 2$ . (b) Verifique a condição  $R(f) \subseteq D(g)$ .

**Teorema 1.1.14** Se  $f : A \rightarrow B$  e  $g : B \rightarrow C$  são duas funções e  $H$  um subconjunto de  $C$ , então  $(g \circ f)^{-1}(H) = f^{-1}(g^{-1}(H))$ .

**Prova.** Suponha que  $a \in (g \circ f)^{-1}(H)$ . Logo,  $g(f(a)) \in H$ . Contudo, isso implica que  $f(a) \in g^{-1}(H)$ , de onde se conclui que  $a \in f^{-1}(g^{-1}(H))$ . Desta forma,  $(g \circ f)^{-1}(H) \subseteq f^{-1}(g^{-1}(H))$ . Assuma agora que  $a \in f^{-1}(g^{-1}(H))$ . Logo,  $f(a) \in g^{-1}(H)$ . Entretanto, essa condição implica que  $g(f(a)) \in H$ , o que tem como consequência  $a \in (g \circ f)^{-1}(H)$ . Assim sendo,  $f^{-1}(g^{-1}(H)) \subseteq (g \circ f)^{-1}(H)$ .  $\square$

## Restrições nos Domínios

---

- Título original: *Restrictions of Functions*.

Sejam  $f : A \rightarrow B$  uma função e  $A_1$  um subconjunto próprio de  $A$ . Defina  $f_1 : A_1 \rightarrow B$  de forma que  $f_1(x) = f(x)$  para todo  $x \in A_1$ . A função  $f_1$  é a **restrição de  $f$  em  $A_1$** .

Qual é a razão para restringir o domínio? A título de exemplo, considere a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ ,  $f(x) = x^2$ . Ela não possui inversa. Todavia,  $f_1 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ ,  $f_1(x) = x^2$  possui uma inversa.

## 1.2 Indução Matemática

**Axioma 1.2.1 (A Propriedade da Boa Ordenação dos Naturais)** Todo subconjunto não vazio de  $\mathbb{N}$  tem um elemento mínimo.

**Comentário** Os autores não usam o “label” axioma. Contudo, eles mencionam que estão assumindo que os naturais possuem a propriedade em questão.

Esse axioma nos permite obter o Teorema 1.2.2 (Princípio da Indução Matemática) e o resultado que se segue.

**1.2.3 Princípio da Indução Matemática (segunda versão)** Seja  $n_0$  um número natural e  $P(n)$  uma afirmativa definida para cada natural  $n \geq n_0$ . Suponha que:

(1) A afirmativa  $P(n_0)$  é verdadeira.

(2) Para todo  $k \geq n_0$ ,  $[P(k) \Rightarrow P(k+1)]$ .

Então  $P(n)$  é verdadeira para todo  $n \geq n_0$ .

**Exercício 13** (seção 1.2) Mostre que  $n < 2^n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Aplicaremos o Princípio da Indução. Seja  $P(n)$  a afirmativa  $n < 2^n$ . Como  $1 < 2^1$ ,  $P(1)$  é verdadeira. Suponha que, para um  $n$  genérico,  $P(n)$  se verifique. Logo,

$$n < 2^n \Rightarrow 2n < 2^{n+1} \Rightarrow n + n < 2^{n+1} \Rightarrow n + 1 < 2^{n+1}.$$

Assim sendo,  $P(n+1)$  é verdadeira. □

**Comentário** Tentativa fracassada do seu professor:  $n < 2^n \Rightarrow n + 1 < 2^n + 1 \Rightarrow ?$ . Contudo, ele poderia ter usado o fato que  $1 < 2^n$  para concluir, pois  $2^n + 1 < 2^n + 2^n = 2^n(1 + 1) = 2^{n+1}$ .

- Ver comentários adicionais no fim deste documento.

### 1.3 Conjunto Finitos e Infinitos

A contagem dos elementos de um conjunto  $S$  envolve criar uma bijeção entre  $S$  e um subconjunto de  $\mathbb{N}$ . Se a contagem jamais se encerra, então  $S$  é um conjunto infinito. Dentre outras coisas, nesta subseção definiremos conceitos como *conjunto finito* e *conjunto infinito*.

**Definição 1.3.1 (a)** O conjunto vazio  $\emptyset$  é dito ter 0 **elementos**.

**(b)** Um conjunto  $S$  é dito ter  $n \in \mathbb{N}$  **elementos** se existir uma bijeção entre  $S$  e o conjunto  $\mathbb{N}_n = \{1, 2, \dots, n\}$ .

**(c)** Um conjunto  $S$  é dito ser **finito** se ele ou é vazio ou tem  $n \in \mathbb{N}$  elementos.

**(d)** Um conjunto  $S$  é dito ser **infinito** se ele não é finito.

**Comentário** Uso de negrito nos itens (a) e (b).

**Teorema 1.3.2 (Unicidade)** Se  $S$  é um conjunto finito, então o número de elementos de  $S$  é um único número em  $\mathbb{N} \cup \{0\}$ .

**Comentários** (1) Livro:  $\mathbb{N}$  ao invés de  $\mathbb{N} \cup \{0\}$ . (2) A prova decorre do fato que se  $n \neq m$ , então não se pode criar uma bijeção de  $\mathbb{N}_n$  em  $\mathbb{N}_m$ .

**Teorema 1.3.3** O conjunto  $\mathbb{N}$  é infinito.

**Comentário** A prova decorre do fato que se não se pode criar uma bijeção de  $\mathbb{N}$  em  $\mathbb{N}_n$ .

**Teorema 1.3.4 (a)** Se  $A$  é um conjunto com  $m$  elementos,  $B$  é um conjunto com  $n$  elementos e  $A \cap B = \emptyset$ , então  $A \cup B$  tem  $m + n$  elementos.

**(b)** Se  $A$  é um conjunto com  $m$  elementos e  $C \subseteq A$  tem 1 elemento, então  $A \setminus C$  tem  $m - 1$  elementos.

**(c)** Se  $C$  é um conjunto infinito e  $B$  é um conjunto finito, então  $C \setminus B$  é um conjunto infinito.

**Prova do item (a).** Sejam  $f : \mathbb{N}_m \rightarrow A$  e  $g : \mathbb{N}_n \rightarrow B$  duas bijeções. Defina  $h : \mathbb{N}_{m+n} \rightarrow A \cup B$  de forma que

$$h(i) = \begin{cases} f(i), & \text{se } i = 1, \dots, m, \\ g(i - m), & \text{se } i = m + 1, \dots, m + n. \end{cases} \quad (1.1)$$

Mostraremos que  $h$  é injetiva e sobrejetiva.

Considere inicialmente a primeira propriedade. Sejam  $i$  e  $j$  dois elementos distintos de  $\mathbb{N}_{m+n}$ . Se ambos pertencem a  $\{1, \dots, m\}$ , então o fato de  $f$  ser injetiva implica



que  $h(i) \neq h(j)$ ; similarmente, o fato de  $g$  ser uma injeção assegura que  $h(i) \neq h(j)$  se  $i$  e  $j$  pertencem a  $\{m+1, \dots, m+n\}$ . Suponha agora que  $i \in \{1, \dots, m\}$  e  $j \in \{m+1, \dots, m+n\}$ . A definição de  $h$  implica que  $h(i) \in A$  e  $h(j) \in B$ . Como  $A \cap B = \emptyset$ ,  $h(i) \neq h(j)$ . Desta forma,  $h$  é uma injeção.

Com relação à segunda propriedade, seja  $y$  um elemento qualquer de  $A \cup B$ . Se  $y \in A$ , então o fato de  $f$  ser sobrejetiva implica que existe  $i \in \mathbb{N}_m$  tal que  $f(i) = y$ . Por sua vez, (1.1) implica que  $h(i) = y$ . Suponha agora que  $y \in B$ . Como  $g$  é sobrejetiva,  $g(j) = y$  para algum  $j \in \mathbb{N}_n$ . Por fim, (1.1) estabelece que  $h(j+m) = y$ .  $\square$

**Teorema 1.3.5** Sejam  $S$  e  $T$  dois conjuntos tais que  $T \subseteq S$ .

(a) Se  $S$  é finito, então  $T$  é finito.

(b) Se  $T$  é infinito, então  $S$  é infinito.

**Prova.** Como (a) e (b) são afirmativas contrapositivas, basta estabelecer (a). Se  $T = \emptyset$ , então não há o que provar. Desta forma, doravante suponha que  $T \neq \emptyset$ . Seja  $P(n)$  a afirmativa *todo subconjunto não vazio de um conjunto  $S$  com  $n \in \mathbb{N}$  elementos é finito*. Basta estabelecer a sua veracidade para concluir a prova. Para tanto, utilizaremos o Princípio da Indução.

Se  $n = 1$ , então o único subconjunto não vazio de  $S$  é o próprio  $S$ . Logo,  $T = S$  e  $T$  é finito. Assim sendo,  $P(1)$  é verdadeira.

Suponha agora que  $P(k)$  é verdadeira para um  $k$  genérico. Sejam  $S$  um conjunto com  $k+1$  elementos,  $f : \mathbb{N}_{k+1} \rightarrow S$  uma bijeção e  $T$  um subconjunto de  $S$ . Existem duas possibilidades: (i)  $f(k+1) \notin T$  e (ii)  $f(k+1) \in T$ . Assuma que (i) seja verdade. Logo,  $T \subseteq S \setminus \{f(k+1)\}$ . Pelo item (b) do Teorema 1.3.4,  $S \setminus \{f(k+1)\}$  tem  $k$  elementos. Como  $P(k)$  é verdadeira,  $T$  é finito. Considere agora a possibilidade (ii). Nesse caso, podemos afirmar que  $T \setminus \{f(k+1)\} \subseteq S \setminus \{f(k+1)\}$ , de onde se conclui que  $T \setminus \{f(k+1)\}$  é finito – pois  $S \setminus \{f(k+1)\}$  tem  $k$  elementos e assumimos que  $P(k)$  é verdadeira. Como  $T = (T \setminus \{f(k+1)\}) \cup \{f(k+1)\}$ , um apelo ao item (a) do Teorema 1.3.4 estabelece que  $T$  é finito.  $\square$

## Conjuntos Contáveis

**Definição 1.3.6** (a) Um conjunto  $S$  é **enumerável** se existir uma bijeção de  $\mathbb{N}$  em  $S$ .

(b) Um conjunto  $S$  é **contável** se ele é ou finito ou enumerável.

(c) Um conjunto  $S$  é **incontável** se ele não é contável.

**Exemplos 1.3.7** (a) O conjunto  $E = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$  dos números pares é enumerável, pois o mapa  $f : \mathbb{N} \rightarrow E$  definido por  $f(n) = 2n$  é uma bijeção.

(b) O conjunto  $\mathbb{Z}$  dos números inteiros é enumerável. Intuição:

$$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\},$$

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}.$$

De fato, a função  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$  definida por

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{se } n \text{ é par} \\ -\frac{n-1}{2}, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

é uma bijeção.

(c) Sejam  $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$  e  $B = \{b_1, b_2, b_3, \dots\}$  dois conjuntos enumeráveis e disjuntos. O conjunto  $A \cup B$  é enumerável. Intuição:  $A \cup B = \{a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, \dots\}$ .  $\square$

**Teorema 1.3.8** O conjunto  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  é enumerável.

Ver Figura 1.3.1 (p. 19).

**Teorema 1.3.9** Sejam  $S$  e  $T$  dois conjuntos tais que  $T \subseteq S$ .

- (a) Se  $S$  é contável, então  $T$  é contável.
- (b) Se  $T$  é incontável, então  $S$  é incontável.

A prova está disponível no Apêndice B do livro-texto.

**Teorema 1.3.10** Seja  $S$  um conjunto não vazio. As seguintes afirmativas são equivalentes:

- (a) O conjunto  $S$  é contável.
- (b) Existe uma sobrejeção de  $\mathbb{N}$  em  $S$ .
- (c) Existe uma injeção de  $S$  em  $\mathbb{N}$ .

**Comentário** O livro não menciona a condição  $S \neq \emptyset$ . Porém, sem essa condição pelo menos a afirmativa [(a)  $\Rightarrow$  (b)] é falsa.

**Prova.** Mostraremos que [(a)  $\Rightarrow$  (b)  $\Rightarrow$  (c)  $\Rightarrow$  (a)]. Considere inicialmente a afirmativa [(a)  $\Rightarrow$  (b)]. Suponha que  $S$  é contável. Se  $S$  é finito, então existe uma bijeção  $h$  entre algum conjunto  $\mathbb{N}_n$  e  $S$ . Defina  $H : \mathbb{N} \rightarrow S$  de forma que

$$H(k) = \begin{cases} h(k) & \text{se } k = 1, \dots, n, \\ h(n) & \text{se } k > n. \end{cases}$$

Observe que  $H$  é uma sobrejeção. Se  $S$  é enumerável, então existe uma bijeção  $H : \mathbb{N} \rightarrow S$ , a qual evidentemente é uma sobrejeção de  $\mathbb{N} \rightarrow S$ .

Com relação à afirmativa [(b)  $\Rightarrow$  (c)], assumamos que  $H : \mathbb{N} \rightarrow S$  é uma sobrejeção. Defina a função  $H_1 : S \rightarrow \mathbb{N}$  de forma que

$$H_1(s) = \min\{n \in \mathbb{N} : H(n) = s\}.$$

Para concluir que  $H_1$  é uma injeção, observe que se  $s, t \in S$  e  $H_1(s) = H_1(t) = \bar{n}$ , então  $H(\bar{n}) = s$  e  $H(\bar{n}) = t$ . Logo,  $s = t$ .

Por fim, considere a afirmativa [(c)  $\Rightarrow$  (a)]. Se  $G_1 : S \rightarrow \mathbb{N}$  é uma injeção, então  $G_2 : S \rightarrow G_1(S)$ ,  $G_2(s) = G_1(s)$ , é uma bijeção. Como  $G_1(S) \subseteq \mathbb{N}$ , o item (a) do Teorema 1.3.9 tem como consequência que  $G_1(S)$  é contável. Logo, existe uma bijeção  $G_3$  de  $G_1(S)$  em um subconjunto  $T$  de  $\mathbb{N}$ . Considere agora a função  $G_3 \circ G_2 : S \rightarrow T$ . Essa função é uma bijeção (ver Exercício 19 da Seção 1.1). Desta forma,  $S$  é contável.  $\square$

**Comentário** Um diagrama pode ser útil para a compreensão do último parágrafo da prova.

**Teorema 1.3.11** O conjunto  $\mathbb{Q}$  dos números racionais é enumerável.

Ver Figura 1.3.2 (p. 20).

**Teorema 1.3.12** Se  $A_m$  é contável para todo  $m \in \mathbb{N}$ , então o conjunto  $\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m$  é contável.

**Teorema de Cantor 1.3.13** Seja  $A$  um conjunto qualquer. Não existe uma sobrejeção de  $A$  no conjunto  $\mathcal{P}(A)$  de todos os subconjuntos de  $A$ .

**Comentário** O resultado acima implica que  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$  é incontável.

### O Princípio da Indução: Comentários Adicionais

- “Fora do livro”.

Sejam  $q$  um número real diferente de 1,  $n$  um número natural e  $P(n)$  a afirmativa

$$\sum_{i=1}^n q^i = \frac{q - q^{n+1}}{1 - q}. \quad (1.2)$$

Suponha que se deseje provar que  $P(n)$  é verdade para todo  $n$ . Evidentemente, não é viável provar individualmente cada uma dessas infinitas afirmativas. Contudo, é suficiente provar que: (i)  $P(1)$  está correta e (ii)  $[P(n) \Rightarrow P(n+1)]$ .

Considere o item (i). Se  $n = 1$ , então o lado esquerdo de (1.2) é igual a  $q$ . Por sua vez, o lado direito é igual a

$$\frac{q - q^2}{1 - q} = q.$$

Logo,  $P(1)$  é verdadeira. Com relação ao item (ii) assuma que (1.2) é verdade. Some  $q^{n+1}$  de ambos lados dessa igualdade. Assim sendo,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+1} q^i &= \frac{q - q^{n+1}}{1 - q} + q^{n+1} = \frac{q - q^{n+1}}{1 - q} + \frac{q^{n+1} - q^{n+2}}{1 - q} \Rightarrow \\ &= \frac{q - q^{n+2}}{1 - q}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Desta forma,  $P(n)$  efetivamente implica  $P(n+1)$ .  $\square$

## Notas de Aula para Bartle & Sherbert

- Comentários sobre a prova do item (ii):
  - O primeiro passo consiste em escrever a igualdade (1.3) no seu rascunho.
    - \* Idealmente (ressalto: idealmente), você terá uma noção precisa daquilo que você quer provar.
  - Faça alguma operação que o coloque na direção do resultado desejado.
  - O seu rascunho não faz parte da demonstração.