

ANÁLISE MATEMÁTICA PARA ECONOMISTAS: NOTAS DE AULA

Elaboração: Alexandre B. Cunha

Introdução: Lógica e Demonstrações

- Considere a seguinte sentença: se f é diferenciável no ponto \bar{x} , então f é contínua no ponto \bar{x} .
 - *Tradeoff* entre clareza e elegância.
 - * Se f é diferenciável no ponto \bar{x} , então f é contínua no ponto em questão.
 - Enunciado alternativo.
 - * P : f é diferenciável no ponto \bar{x}
 - * Q : f é contínua no ponto \bar{x}
 - * $P \Rightarrow Q$ Lê-se P implica Q .
 - Atenção: os símbolos “ \Rightarrow ” e “ \rightarrow ” possuem significados distintos; é necessário utilizar os símbolos corretos.
- Como provar a veracidade de uma afirmativa do tipo $[P \Rightarrow Q]$?
 - Há pelo menos três maneiras.
 1. Demonstração direta.
 - * $P \Rightarrow R_1 \Rightarrow R_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow R_n \Rightarrow Q$
 - * Evidentemente, podem ocorrer variações. Por exemplo: $P \Rightarrow R_1$, $P \Rightarrow R_2$ e $[(R_1 \& R_2) \Rightarrow Q]$.
 2. Demonstração por contraposição:
 - * Utilize a abordagem direta para mostrar que $[\neg Q \Rightarrow \neg P]$.
 - * As afirmativas $[P \Rightarrow Q]$ e $[\neg Q \Rightarrow \neg P]$ são *equivalentes*.

Introdução: Notas de Aula

- * Duas afirmativas R e S são equivalentes quando R implica S e S implica R . Em símbolos, $[R \iff S]$.
 - * Exemplos: $[x > 2 \Rightarrow x > 0]$ e $[x \leq 0 \Rightarrow x \leq 2]$; *Alexandre nasceu no Rio de Janeiro implica que Alexandre nasceu no Brasil* e *Alexandre não nasceu no Brasil implica que Alexandre não nasceu no Rio de Janeiro*.
 - * Voltaremos a discutir logo abaixo as afirmativas do tipo $[R \iff S]$.
3. Demonstração por contradição (ou absurdo).
- * Assuma que $[P \& \neg Q]$ é verdade e obtenha uma contradição.
 - * Contradição a um fato conhecido ou a alguma conclusão obtida ao longo do seu argumento.
 - * Primeiro Teorema do Bem-Estar Social.

Exemplo $[x > 1 \Rightarrow x^2 > 1]$.

Prova direta: Como $x > 1$, $x^2 > x$. Combine essas duas desigualdades para concluir que $x^2 > 1$. \square

Comentário: o símbolo de Halmos \square denota o fim de uma demonstração (retângulo cheio no livro do Paul Halmos).

Dica: não questione o porquê de cada passo; questione a sua correção.

Prova por contraposição: Assuma que $x^2 \leq 1$; desta forma, $x^2 - 1 \leq 0$. Utilize a última desigualdade para concluir que $(x - 1)(x + 1) \leq 0$. Assim sendo, $x - 1 \leq 0$ ou $x + 1 \leq 0$. Se a primeira dessas duas desigualdades se verifica, então $x \leq 1$. Por outro lado, se $x + 1 \leq 0$, então $x \leq -1 \leq 1$. \square

Comentário: significado de “ou”. Inglês: *or* (ou) e *either...or* (ou...ou).

Prova por contradição: Suponha que $x > 1$ e $x^2 \leq 1$. Como $-x < -1$, $x^2 - x < 0$. A última desigualdade implica que $x(x - 1) < 0$. Logo, $x < 0$ ou $x < 1$. Contudo, qualquer uma das duas últimas desigualdades contradiz a hipótese de que $x > 1$. \square

Comentário: também se poderia afirmar que a expressão $x(x - 1) < 0$ contradiz o fato de que o produto de dois números positivos é positivo.

Atenção É preciso utilizar “texto”. Compare a prova por contradição com o rascunho que se segue.

$$\begin{array}{llll} x & > & 1 & \quad x^2 \leq 1 \\ -x & < & -1 \Rightarrow x^2 - x < 0 \Rightarrow x(x - 1) < 0 \\ x & < & 0 & \quad x < 1 \quad \text{absurdo!} \end{array}$$

Introdução: Notas de Aula

Vale ressaltar que as expressões matemáticas precisam respeitar as regras de pontuação. Considere o exemplo abaixo.

Exemplo Fix π^e . Observe that for all $\pi \neq \pi^*$,

$$\begin{aligned} U(\pi^e, \pi) &= W(\pi^e, \pi) - C \leq W(\pi^e, f(\pi^e)) - C \leq U(\pi^e, f(\pi^e)) \Rightarrow \\ U(\pi^e, \pi) &\leq \max\{U(\pi^e, f(\pi^e)), U(\pi^e, \pi^*)\}. \end{aligned} \quad (1)$$

Since $U(\pi^e, \pi^*) \leq \max\{U(\pi^e, f(\pi^e)), U(\pi^e, \pi^*)\}$, (1) holds for all $\pi \in \mathcal{A}$.

Atenção Você não deve decorar o texto utilizado pelo seu professor! Considere a seguinte questão (P2 2021):

Considere a sequência de números reais definida recursivamente por $z_1 = 80$ e

$$z_{n+1} = \frac{1}{4}z_n + 12.$$

Prove que (z_n) é convergente e calcule o seu limite.

Resposta Seja $P(n)$ a afirmativa

$$0 \leq z_{n+1} \leq z_n \leq 80.$$

Utilizaremos o Princípio da Indução para mostrar que ela é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $z_1 = 80$ e $z_2 = 32$, $P(1)$ é verdadeira. Agora, assuma que $P(n)$ se verifique. Logo,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{1}{4}z_{n+1} \leq \frac{1}{4}z_n \leq 20 \Rightarrow 12 \leq \frac{1}{4}z_{n+1} + 12 \leq \frac{1}{4}z_n + 12 \leq 32 \Rightarrow \\ 12 &\leq z_{n+2} \leq z_{n+1} \leq 32 \Rightarrow 0 \leq z_{n+2} \leq z_{n+1} \leq 80. \end{aligned}$$

Tendo em vista que $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$, concluímos que (z_n) é decrescente e limitada. Logo, ela é convergente. Por fim, denote o seu limite por z . Desta forma,

$$z = \frac{1}{4}z + 12 \Rightarrow \frac{3}{4}z = 12 \Rightarrow z = 16.$$

- A expressão “se e somente se”.

- P se e somente se Q significa $[P \iff Q]$.
 - * Formulação alternativa: P é necessária e suficiente para Q .
 - * Parte “se” (necessidade ou condição necessária): $[Q \Rightarrow P]$.
 - * Parte “somente se” (suficiência ou condição suficiente): $[P \Rightarrow Q]$.
- Inglês: *if and only if* ou *iff* (jargão matemático; Halmos mais uma vez).

Introdução: Notas de Aula

- Sugestão: faça a prova de uma afirmativa do tipo “se e somente se” por partes. Primeiro mostre que $[P \Rightarrow Q]$ e depois prove $[Q \Rightarrow P]$.
- Comentário: uso da expressão “se” (*if*) em definições.

Exercício Considere a equação $x^2 + 1 = 0$. Não há solução (real). Agora, considere o seguinte esboço

$$\begin{aligned}x^2 + 1 &= 0 \\(x^2 - 1)(x^2 + 1) &= 0 \\x^4 - 1 &= 0 \\x &= 1\end{aligned}$$

Evidentemente, há um problema. Qual é? Dica: “ \Longleftrightarrow vs. \Longrightarrow ”.