ANÁLISE MATEMÁTICA PARA ECONOMISTAS: NOTAS DE AULA

Este documento consiste em notas de aula para o Capítulo 2 de Bartle & Sherbert (*Introduction to Real Analysis*. 3ª edição. Nova Iorque: John Wiley & Sons, 2000).

Elaboração: Alexandre B. Cunha

2 Os Números Reais

- É possível construir $\mathbb{R}$ a partir de $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Q}$. Não faremos isso.
- Nossa abordagem: assumir algumas propriedades básicas e obter outras.
- Estrutura do capítulo:
  - Seção 2.1: algumas propriedades dos números reais;
  - Seção 2.2: valor absoluto;
  - Seção 2.3: completude;
  - Seção 2.4: alguns resultados fundamentais (exemplos: existência de raiz quadrada e densidade dos racionais em $\mathbb{R}$);
  - Seção 2.5: a incontabilidade de $\mathbb{R}$.

2.1 As Propriedade Algébricas e de Ordenação de $\mathbb{R}$

- Seremos rápidos nesta seção.

Axioma 2.1.1 (As Propriedade Algébricas de $\mathbb{R}$) Existem duas operações binárias definidas em $\mathbb{R}$, denotadas por $+$ e $\cdot$ e denominadas, respectivamente, adição e multiplicação. Essas operações satisfazem as seguintes propriedades:
(A1) $a + b = b + a$ para todo a e todo b em $\mathbb{R}$;
(A2) $(a + b) + c = a + (b + c)$, para todo a, todo b e todo c em $\mathbb{R}$;

(A3) existe um elemento $0 \in \mathbb{R}$ tal que $0 + a = a$ e $a + 0 = a$ para todo a em $\mathbb{R}$;
(A4) existe um elemento $-a \in \mathbb{R}$ tal que $a + (-a) = 0$ e $(-a) + a = 0$ para todo $a \in \mathbb{R}$;
(M1) $a \cdot b = b \cdot a$ para todo a e todo b em $\mathbb{R}$;
(M2) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, para todo a, todo b e todo c em $\mathbb{R}$;
(M3) existe um elemento $1 \in \mathbb{R}$ tal que $1 \cdot a = a$ e $a \cdot 1 = a$ para todo a em $\mathbb{R}$;
(M4) para todo $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ existe um elemento $1/a \in \mathbb{R}$ tal que $a \cdot (1/a) = 1$ e $(1/a) \cdot a = 1$;
(D) $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ e $(b + c) \cdot a = (b \cdot a) + (c \cdot a)$, para todo a, todo b e todo c em $\mathbb{R}$.

Teorema 2.1.2 **(a)** Se z e a pertencem a $\mathbb{R}$ e $z + a = a$, então $z = 0$.
(b) Se u e $b \neq 0$ pertencem a $\mathbb{R}$ e $u \cdot b = b$, então $u = 1$.
(c) Se $a \in \mathbb{R}$, então $a \cdot 0 = 0$.

Prova (esboço) do item (a).

$$z \overset{A3}{=} z + 0 \overset{A4}{=} z + (a + (-a)) \overset{A2}{=} (z + a) + (-a) \overset{z+a=a}{=} a + (-a) \overset{A4}{=} 0 \qquad \square$$

Teorema 2.1.3 **(a)** Se $a \neq 0$ e b pertencem a $\mathbb{R}$ e satisfazem $a \cdot b = 1$, então $b = 1/a$.
(b) Se a e b pertencem a $\mathbb{R}$ e $a \cdot b = 0$, então $a = 0$ ou $b = 0$.

Comentário Os autores não deveriam ter utilizado a palavra *either* no item (b).

Números Racionais e Irracionais

Um elemento n de $\mathbb{N}$ é a soma de $1 \in \mathbb{R}$ com ele mesmo n vezes ("n-fold sum"); logo, $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$. O número $0 \in \mathbb{R}$ também pertence a $\mathbb{Z}$ e um elemento $-n$ de $\mathbb{Z}$ é igual a "n-fold sum" de $-1 \in \mathbb{R}$; desta forma, $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$. Os elementos de $\mathbb{R}$ que podem ser expressos na forma b/a, onde b e a pertencem a $\mathbb{Z}$ e $a \neq 0$, constituem o conjunto $\mathbb{Q}$. Evidentemente, $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$; contudo, o fato de que $\mathbb{Q} \neq \mathbb{R}$ merece alguma reflexão.

Comentário Sociedade dos Pitagoreanos (*Pythagorean Society*): já se sabia que não existe $r \in \mathbb{Q}$ com propriedade que $r^2 = 2$. (Desenhar quadrado com lados de dimensão 1 e diagonal com medida r). O conjunto $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ é chamado de conjunto dos irracionais.

Teorema 2.1.4 *Não existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $r^2 = 2$.*

Prova. Suponha, por absurdo, que p e q pertencem a $\mathbb{Z}$ e $(p/q)^2 = 2$. Sem perda de generalidade, assuma que p e q são positivos e não tem nenhum fator comum. Como

$$p^2 = 2q^2, \tag{2.1}$$

p^2 é um número par. Isso implica que p também é um número par. Para chegar a essa conclusão, suponha que $p = 2n - 1$, onde n é um número natural. Nesse caso,

$$p^2 = 4n^2 - 4n + 1 = 4n^2 - 4n + 2 - 1 = 2(2n^2 - 2n + 1) - 1,$$

e p^2 seria ímpar. Dado que p é par, $p = 2m$ para algum $m \in \mathbb{N}$. Logo, (2.1) implica que

$$4m^2 = 2q^2 \Rightarrow q^2 = 2m^2.$$

Assim sendo, q^2 é par e, a exemplo de p, q também é par. Contudo, tal conclusão contradiz o fato de que p e q não possuem algum fator comum. $\square$

Comentário Prova ligeiramente distinta da do livro-texto.

As Propriedades de Ordenação de $\mathbb{R}$

Axioma 2.1.5 (As Propriedades de Ordenação de $\mathbb{R}$) Existe um subconjunto $\mathbb{P}$ de $\mathbb{R}$, denominado de conjunto dos números reais positivos, que satisfaz as seguintes propriedades:
(i) Se a e b pertencem a $\mathbb{P}$, então $a + b$ pertence a $\mathbb{P}$.
(ii) Se a e b pertencem a $\mathbb{P}$, então ab pertence a $\mathbb{P}$.
(iii) Se a pertence a $\mathbb{R}$, então exatamente uma dessas três condições se verifica: $a \in \mathbb{P}$, $a = 0$ e $-a \in \mathbb{P}$.

Se $a \in \mathbb{P}$, então nós escrevemos $a > 0$ e afirmamos que a é positivo. Se $a \in \mathbb{P} \cup \{0\}$, então nós escrevemos $a \geq 0$ e afirmamos que a é não negativo. Se $-a \in \mathbb{P}$... Se $-a \in \mathbb{P} \cup \{0\}$...

Definição 2.1.6 Sejam a e b elementos de $\mathbb{R}$.
(a) Se $a - b \in \mathbb{P}$, então nós escrevemos $a > b$ ou $b < a$.
(b) Se $a - b \in \mathbb{P} \cup \{0\}$, então nós escrevemos $a \geq b$ ou $b \leq a$.

Teorema 2.1.7 Sejam a, b e c elementos de $\mathbb{R}$.
(a) Se $a > b$ e $b > c$, então $a > c$.
(b) Se $a > b$, então $a + c > b + c$.
(c) Se $a > b$ e $c > 0$, então $ca > cb$; se $a > b$ e $c < 0$, então $ca < cb$.

Prova do item (a). Como ambos $a - b$ e $b - c$ pertencem a $\mathbb{P}$, então 2.1.5(i) implica que $(a-b)+(b-c) \in \mathbb{P}$. Utilize as propriedades (A1), (A2) e (A4) de 2.1.1 para concluir que $(a - b) + (b - c) = a - c$. Assim sendo, $a - c \in \mathbb{P}$. $\square$

Teorema 2.1.8 **(a)** Se $a \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, então $a^2 > 0$.
(b) $1 > 0$.
(c) Se $n \in N$, então $n > 0$.

Conforme mencionado no livro-texto, não existe um número positivo que seja menor do que todos os outros números positivos. De fato, se $a > 0$, então $0 < (1/2)a < a$. Atenção: é preciso estabelecer que as duas desigualdades são verdadeiras. Segue-se um **esboço**.
$0 < (1/2)a$: [1 e 2 positivos (ambos naturais)] [Suponha que $1/2 < 0$. Como $(1/2) \cdot 2 = 1$, 2.1.7(c) implicaria $1 < 0$] [Aplique 2.1.7(c) para concluir que $(1/2)a > 0$]
$(1/2)a < a$: [$a > 0 \overset{(1)}{\Rightarrow} a + a = 2a > a \overset{(2)}{\Rightarrow} 2a - a > 0 \overset{(3)}{\Rightarrow} a - (1/2)a > 0 \overset{(4)}{\Rightarrow} a > (1/2)a$]
(1) 2.1.7(b) (2) 2.1.6(a) (3) 2.1.7(c) ["$\times(1/2)$"e 2.1.1] (4) 2.1.6(a)

O fato de que $\mathbb{P}$ não possui elemento mínimo é generalizado no próximo teorema, o qual é pode ser útil para estabelecer que um dado número é igual a 0.

Teorema 2.1.9 *Se $a \in \mathbb{R}$ e $0 \leq a < \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$, então $a = 0$.*

Prova. A prova será feita por contraposição. Suponha que $a \neq 0$. Se $a < 0$, então a desigualdade $0 \leq a$ é desrespeitada. Se $a > 0$, então defina $\varepsilon_0 = (1/2)a$. Como $(1/2)a < a$, a condição $a < \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$ não se verifica. □

- Teorema 2.1.10 e Corolário 2.1.11: ler.

Desigualdades

- Exemplos 2.1.12 e 2.1.13: ler.

Exemplo 2.1.13 **(c)** **A desigualdade de Bernoulli** Se $x > -1$, então

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx, \tag{4}$$

para todo $n \in N$.
Aplicaremos o Princípio da Indução. Claramente, (4) é respeitada para $n = 1$. Suponha agora que a desigualdade em questão se verifica para um n genérico. Utilize o fato que $1 + x$ é positivo para concluir que

$$(1 + x)^{n+1} \geq (1 + nx)(1 + x) = 1 + x + nx + nx^2 = 1 + (n+1)x + nx^2 > 1 + (n+1)x.$$

Assim sendo, $(1 + x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x$. □

2.2 Valor Absoluto e a Linha Reta

Definição 2.2.1 O **valor absoluto** do número real a, denotado por $|a|$, é dado por

$$|a| = \begin{cases} a & \text{se } a > 0, \\ 0 & \text{se } a = 0, \\ -a & \text{se } a < 0. \end{cases} \tag{2.2}$$

Por exemplo, $|5| = 5$ e $|-8| = 8$. Observe que $|a| \geq 0$ e $|a| = |-a|$ para todo a; adicionalmente, $|a| = 0$ se e somente se $a = 0$.

Teorema 2.2.2 **(a)** $|ab| = |a||b|$, para todo a e todo b em $\mathbb{R}$.
(b) $|a|^2 = a^2$, para todo a em $\mathbb{R}$.
(c) Se $c \geq 0$, então $|a| \leq c$ se e somente se $-c \leq a \leq c$.
(d) $-|a| \leq a \leq |a|$, para todo a em $\mathbb{R}$.

Prova. Considere o item (a). Suponha que $a = 0$ ou $b = 0$. Logo, $|ab| = |0| = 0$, ao passo que $|a||b|$ também é igual a 0. Existem três outros casos a serem considerados: (i) $a > 0$ e $b > 0$; (ii) $a > 0$ e $b < 0$ e (iii) $a < 0$ e $b < 0$. Se (i) se verifica, então $ab > 0$; consequentemente, $|ab| = ab$. Adicionalmente, $|a| = a$ e $|b| = b$; logo, $|a||b| = ab$. Assim sendo, $|ab| = |a||b|$. Suponha agora que (ii) se verifica. Desta forma, $ab < 0$, de onde se conclui que $|ab| = -ab$. Por outro lado, $|a||b| = a \cdot (-b) = -ab$. Por fim, se (iii) se verifica, então $ab > 0$, o que implica que $|ab| = ab$. Ademais, $|a| = -a$ e $|b| = -b$; assim sendo, $|a||b| = (-a) \cdot (-b) = ab$.

No tocante ao item (b), lembre que $a^2 \geq 0$. Logo, $a^2 = |a^2|$. Todavia, o item (a) implica que $|a^2| = |a|^2$. Desta forma, $a^2 = |a|^2$.

Discute-se agora o item (c). Seja c um real não negativo. Considere a parte "somente se" da afirmativa. Assuma que $|a| \leq c$. Se $a \geq 0$, então $|a| = a$; logo, $a \leq c$. Adicionalmente, é trivialmente verdade que $a \geq -c$. Combine as duas últimas desigualdades para obter o resultado desejado. Se $a < 0$, então $|a| = -a$. Assim sendo, $-a \leq c$, o que implica que $a \geq -c$. Ademais, a desigualdade $a \leq c$ é trivialmente satisfeita. Mais uma vez, combine as duas desigualdades mais recentes para concluir que $-c \leq a \leq c$. Para estabelecer a parte "se", assuma que $-c \leq a \leq c$. Logo, ambas as desigualdades $-a \leq c$ e $a \leq c$ são satisfeitas. Como (2.2) implica que $|a|$ é igual a a ou 0 ou $-a$, $|a| \leq c$.

Para estabelecer a afirmativa (d) é suficiente fazer $c = |a|$ e aplicar a parte "somente se" da afirmativa (c). $\square$

Teorema 2.2.3 (Desigualdade Triangular) Se a e b pertencem a $\mathbb{R}$, então $|a + b| \leq |a| + |b|$.

Prova. A desigualdade em questão decorre do Teorema 2.2.2. Primeiro, utilize (d) para concluir que

$$-|a| \leq a \leq |a| \;\; \& \;\; -|b| \leq b \leq |b| \Rightarrow -(|a|+|b|) \leq a+b \leq |a|+|b|.$$

Agora, observe que (c) implica que $|a+b| \leq |a|+|b|$. □

Corolário 2.2.4 Se a e b pertencem a $\mathbb{R}$, então
(a) $||a|-|b|| \leq |a-b|$,
(b) $|a-b| \leq |a|+|b|$.

Prova (esboço). (a) $[a = a-b+b \Rightarrow |a| = |(a-b)+b| \leq |(a-b)|+|b| \Rightarrow |a|-|b| \leq |a-b|]$
$[b = b-a+a \Rightarrow |b| = |b-a+a| \leq |b-a|+|a| \Rightarrow -|a-b| = -|b-a| \leq |a|-|b|]$
Aplique 2.2.2(c).
(b) Substitua b por $-b$ na Desigualdade Triangular. □

Corolário 2.2.5 Se a_1, a_2,$\cdots$, a_n são números reais, então $|\sum_{i=1}^{n} a_i| \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i|$.

Exemplos 2.2.6 (a) Determine o conjunto A dos números reais x que satisfazem a condição $|2x+3| < 7$.

$$\begin{aligned} |2x+3| &< 7 \iff -7 < 2x+3 < 7 \iff -10 < 2x < 4 \iff -5 < x < 2 \\ A &= \{x \in \mathbb{R} : -5 < x < 2\} \end{aligned}$$

(b) Determine o conjunto B dos números reais x que satisfazem

$$|x-1| < |x|. \tag{2.3}$$

Abordagem 1 Identificar uma forma de "remover" os sinais de valor absoluto.
Lado esquerdo: $x \geq 1 \implies |x-1| = x-1$; $x < 1 \implies |x-1| = 1-x$
Lado direito: $x \geq 0 \implies |x| = x$; $x < 0 \implies |x| = -x$
caso (i): $x \geq 1$

$$|x-1| < |x| \iff x-1 < x \iff -1 < 0$$

Logo, (2.3) é satisfeita para todo $x \geq 1$.
caso (ii): $x < 1$ e $x \geq 0$

$$|x-1| < |x| \iff 1-x < x \iff 1 < 2x \iff x > 1/2$$

Logo, (2.3) é satisfeita para $1/2 < x < 1$.
caso (iii): $x < 0$

$$|x-1| < |x| \iff 1-x < -x \iff 1 < 0$$

Logo, (2.3) não é satisfeita para $x < 0$.
Conclusão: $B = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1 \text{ ou } 1/2 < x < 1\} = \{x \in \mathbb{R} : x > 1/2\}$.
Abordagem 2 Utilizar o fato que se $a \geq 0$ e $b \geq 0$, então

$$a < b \iff a^2 < b^2. \tag{2.4}$$

$$|x-1| < |x| \iff |x-1|^2 < |x|^2 \iff (x-1)^2 < x^2 \iff x^2-2x+1 < x^2 \iff x > 1/2$$

Observação Sim, (2.4) está correta. Assuma que $a \geq 0$ e $b \geq 0$.

$$\begin{aligned} 0 &\leq a < b \Rightarrow a^2 \leq ab \;\&\; ab < b^2 \Rightarrow a^2 < b^2 \\ a &\geq b \geq 0 \Rightarrow a^2 \geq ab \;\&\; ab \geq b^2 \Rightarrow a^2 \geq b^2 \end{aligned}$$

(c) Seja A o conjunto $\{x \in \mathbb{R} : 2 \leq x \leq 3\}$ e $f : A \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = (2x^2 + 3x + 1)/(2x - 1)$. Ache um número real M tal que $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in A$.

$$|2x^2 + 3x + 1| \leq 2|x^2| + 3|x| + 1 \leq 2 \times 9 + 3 \times 3 + 1 = 28$$

Adicionalmente, $[2x - 1 < 0 \iff x < 1/2]$. Logo, $2x - 1 > 0$ para todo $x \in A$.

$$|2x - 1| = 2x - 1 \geq 2 \times 2 - 1 = 3$$

Desta forma, é suficiente fazer $M = 28/3$. Comentários: qualquer número maior que 28/3...; provavelmente 28/3 não é o menor valor possível. □

A Linha Reta

O conceito de valor absoluto está associado à noção de distância; ver Figura 2.2.1 (p. 33).

Definição 2.2.7 Sejam a e ε dois números reais, sendo que $\varepsilon > 0$. A ***vizinhança-ε*** de a é o conjunto $V_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \varepsilon\}$.

Observe que

$$x \in V_\varepsilon(a) \iff -\varepsilon < x - a < \varepsilon \iff a - \varepsilon < x < a + \varepsilon;$$

ver Figura 2.2.2 (p. 33).

Teorema 2.2.8 *Seja a um número real. Se $x \in V_\varepsilon(a)$ para todo $\varepsilon > 0$, então $x = a$.*

Prova. Se $|x - a| < \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$, então o Teorema 2.1.9 implica que $|x - a| = 0$. Assim sendo, $x = a$. □

Exemplos 2.2.9 (a) Seja U o conjunto $\{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}$. Para $a \in U$, defina $\varepsilon = \min\{a, 1-a\}$. Mostre que $V_\varepsilon(a) \subseteq U$ (consequentemente, para todo $x \in U$ existe uma vizinhança-ε de x contida em U).
Há dois casos a considerar: (i) $a \geq 1-a$ e (ii) $a < 1-a$. Caso (i)

$$\begin{aligned} x &\in V_\varepsilon(a) \Rightarrow |x-a| < \min\{a, 1-a\} = 1-a \Rightarrow \\ -(1-a) &< x-a < 1-a \Rightarrow a-(1-a) < x < 1 \Rightarrow 0 < x < 1 \end{aligned}$$

Obs.: $a \geq 1-a \Rightarrow 0 \leq a-(1-a)$.
Caso (ii)

$$\begin{aligned} x &\in V_\varepsilon(a) \Rightarrow |x-a| < \min\{a, 1-a\} = a \Rightarrow \\ -a &< x-a < a \Rightarrow 0 < x < 2a \Rightarrow 0 < x < 1 \end{aligned}$$

Obs.: $a < 1-a \Rightarrow 2a < 1$.
(b) Seja I o conjunto $\{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\}$. Para qualquer $\varepsilon > 0$, $V_\varepsilon(0)$ contém pontos que não pertencem a I. Por exemplo, $-\varepsilon/2$ pertence a $V_\varepsilon(0)$ e não pertence a I.
(c) Se $|x-a| < \varepsilon$ e $|y-b| < \varepsilon$, então a Desigualdade Triangular implica que

$$|(x+y)-(a+b)| = |(x-a)+(y-b)| \leq |x-a| + |y-b| < 2\varepsilon.$$

Assim sendo, $x+y \in V_{2\varepsilon}(a+b)$. Entretanto, não se pode afirmar que $x+y$ pertence a $V_\varepsilon(a+b)$. Exemplo: $a = 1$, $b = -1$, $\varepsilon = 3/8$, $x = 10/8$ e $y = -6/8$.

$$\begin{aligned} |x-a| &= \frac{2}{8} \Rightarrow x \in V_{\frac{3}{8}}(a) \\ |y-b| &= \frac{2}{8} \Rightarrow y \in V_{\frac{3}{8}}(b) \\ |(x+y)-(a+b)| &= \frac{4}{8} \Rightarrow x+y \notin V_{\frac{3}{8}}(a+b) \ \square \end{aligned}$$

2.3 A Propriedade de Completude de $\mathbb{R}$

Os conjuntos $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ possuem as mesmas propriedades algébricas e de ordem. Todavia, ao contrário de $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ possue a propriedade de ser completo.

Supremos e Ínfimos

Definição 2.3.1 Seja S um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$.
(a) O conjunto S é dito ser **limitado superiormente** se existir $u \in \mathbb{R}$ tal que $s \leq u$ para todo $s \in S$. O número u é uma **cota superior** de S.
(b) O conjunto S é dito ser **limitado inferiormente** se existir $w \in \mathbb{R}$ tal que $w \leq s$

para todo $s \in S$. O número w é uma **cota inferior** de S.
(c) O conjunto S é dito ser **limitado** se ele for limitado superior e inferiormente e **ilimitado** se ele não for limitado.

Comentário *bounded* e *limited* vs limitado

A título de ilustração, considere os conjuntos $\mathbb{R}$, $\mathbb{N}$, $S_1 = \{x \in \mathbb{R} : x < 2\}$, $S_2 = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 10\}$ e $S_3 = \{x \in \mathbb{R} : -2 < x < 8\}$. $\mathbb{R}$ é ilimitado (superior e inferiormente), $\mathbb{N}$ é ilimitado (porém limitado inferiormente), S_1 é ilimitado (porém limitado superiormente), S_2 é ilimitado (porém limitado inferiormente) e S_3 é limitado.

Se um conjunto S tem uma cota superior (inferior), então ele tem infinitas outras cotas superiores (inferiores); ver Figura 2.3.1 (p. 35).

Definição 2.3.2 Seja S um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$.
(a) Se S é limitado superiormente, então um número u será o **supremo** (ou a **menor cota superior**) de S se ele satisfizer as seguintes duas condições: **(1)** u é um cota superior de S e **(2)** se v é uma cota superior de S, então $u \leq v$.
(b) Se S é limitado inferiormente, então um número w será o **ínfimo** (ou a **maior cota inferior**) de S se ele satisfizer as seguintes duas condições: **(1′)** w é uma cota inferior de S e **(2′)** se t é um cota inferior de S, então $t \leq w$.

Nem todo conjunto tem supremo e/ou ínfimo. Por exemplo, o ínfimo do conjunto $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ é igual a 0. Contudo, esse mesmo conjunto não tem supremo.

Um dado conjunto S tem no máximo um supremo, pois se u_1 e u_2 são cotas superiores de S e $u_1 < u_2$, então u_2 não pode ser a menor cota superior. Similarmente, o ínfimo também é único.

As notações $\sup S$ e $\inf S$ são bastante populares.

Lema 2.3.3 Um número u é o supremo de um conjunto não vazio $S \subseteq \mathbb{R}$ se e somente se u satisfaz às seguintes condições: **(1)** $s \leq u$ para todo $s \in S$ e **(2)** se $v < u$, então existe $s' \in S$ tal que $v < s'$.

Prova. Começaremos pela parte "se". A condição (1) implica que u é uma cota superior de S. Adicionalmente, a condição (2) implica que qualquer número menor que u não é uma cota superior de S; desta forma, u é a menor cota superior de S.

Considere agora a parte "somente se". Se u é o supremo de S, então u é uma cota superior de S. Assim sendo, u satisfaz à condição (1). A veracidade da condição (2) será estabelecida por contraposição. Suponha que ela não se verifique. Logo, existe um número $v_0 < u$ tal que $s \leq v_0$ para todo $s \in S$. Contudo, isto implica que v_0 é uma cota superior de S. Como $v_0 < u$, u não é a menor cota superior de S. Logo, u não é o supremo de S. □

Lema 2.3.4 Uma cota superior u de um conjunto não vazio $S \subseteq \mathbb{R}$ é o supremo de S se e somente se para todo $\varepsilon > 0$ existir um $s_\varepsilon \in S$ tal que $u - \varepsilon < s_\varepsilon$.

Ver Figura 2.3.2 (p. 37).
É importante ter em mente que o supremo de um conjunto pode ou não pertencer ao conjunto em questão.

Exemplos 2.3.5 **(a)** Suponha que $S_1 \subseteq \mathbb{R}$ é um conjunto finito e não vazio. O seu supremo é igual ao seu maior elemento, ao passo que o seu ínfimo é igual ao seu menor elemento.
(b) Considere o conjunto $S_2 = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\}$. Claramente, 1 é uma cota superior de S_2. Por outro lado, se $v < 1$, então existe $s' \in S_2$ tal $v < s'$ (por exemplo, $s' = 1$). Logo, $\sup S_2 = 1$. Abordagem similar estabelece que $\inf S_2 = 0$. Observe que ambos $\sup S_2$ e $\inf S_2$ pertencem a S_2.
(c) Considere o conjunto $S_3 = \{x \in R : 0 < x < 1\}$. Assim como no item anterior, 1 é uma cota superior de S_3. Suponha que $v < 1$. Se $v < 0$, então ele claramente não é uma cota superior de S_3 e por tal motivo não pode ser o seu supremo. Se $v \geq 0$, então faça $s' = v + (1 - v)/2$. Observe que $0 < s' < 1$; ou seja, $s' \in S_3$. Como $s' > v$, v não é uma cota superior de S_3. Logo, 1 é a menor cota superior de S_3; desta forma, $\sup S_3 = 1$. Raciocínio similar estabelece que $\inf S_3 = 0$. □

A Propriedade de Completude de $\mathbb{R}$

Axioma 2.3.6 (A Propriedade de Completude de $\mathbb{R}$) Todo subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$ que possui uma cota superior também possui um supremo em $\mathbb{R}$.

- Também conhecida como *Propriedade do Supremo de* $\mathbb{R}$ (*Supremum Property of* $\mathbb{R}$ em inglês).
- Axioma para nós; em abordagens mais sofisticadas essa propriedade é um teorema.
- Intuição: não há buracos (*gaps*) na linha reta.

Como consequência do Axioma da Completude, todo subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$ que possui uma cota inferior também possui um ínfimo em $\mathbb{R}$. De fato, se S é limitado inferiormente, então $\bar{S} = \{-s : s \in S\}$ é limitado superiormente (logo, $\bar{S}$ possui um supremo) e $\inf S = -\sup \bar{S}$. Segue-se um esboço da prova:
(i) $\bar{S}$ é limitado superiormente

$$\inf S \leq s, \forall s \in S \Rightarrow -s \leq -\inf S, \forall s \in S$$

(ii) $\inf S = -\sup \bar{S}$ Evidentemente, basta mostrar que $\sup \bar{S} = -\inf S$.

$$x < -\inf S \Rightarrow \inf S < -x \Rightarrow \exists s' \in S : s' < -x \Rightarrow x < -s'$$

Logo, x não é uma cota superior de $\bar{S}$.

2.4 Aplicações da Propriedade do Supremo

Exemplos 2.4.1 **(a)** É importante que o supremo e o ínfimo sejam compatíveis com as propriedades algébricas de $\mathbb{R}$. A título de ilustração, analisaremos a compatibilidade entre a operação de "tomar o supremo" e a soma. Sejam $S \subseteq \mathbb{R}$ um conjunto não vazio limitado superiormente e a um número real. Defina $T_a = \{a + s : s \in S\}$. Mostraremos que $\sup T_a = a + \sup S$. Observe que $a + \sup S$ é uma cota superior de T_a, pois

$$\sup S \geq s,\ \forall s \in S \Rightarrow a + \sup S \geq a + s,\ \forall s \in S.$$

Seja x um real tal que $x < a + \sup S$. Assim sendo,

$$x - a < \sup S \Rightarrow \exists s \in S : x - a < s \Rightarrow \exists s \in S : x < a + s.$$

Logo, x não é uma cota superior de T_a.
(b) Se os supremos ou ínfimos de dois conjuntos estão sendo analisados, frequentemente é necessário aplicar um raciocínio de dois estágios. Por exemplo, sejam A e B dois subconjuntos de $\mathbb{R}$, ambos limitados, tais que

$$a \leq b,\ \forall a \in A,\ \forall b \in B. \tag{2.5}$$

Mostraremos que $\sup A \leq \sup B$. De fato, como $b \leq \sup B$ para todo $b \in B$, (2.5) implica que $a \leq \sup B$, para todo $a \in A$. Desta forma, $\sup B$ é uma cota superior de A. Como $\sup A$ é a menor cota superior de A, $\sup A \leq \sup B$. $\square$

Funções

Dada uma função $f : D \to \mathbb{R}$, nós afirmamos que f é *limitada superiormente* se o conjunto $f(D) = \{f(x) : x \in D\}$ é limitado superiormente. As expressões *limitada inferiormente* e *limitada* são definidas de forma similar. Observe que f é limitada se e somente se existir $B \in \mathbb{R}$ tal que $|f(x)| \leq B$ para todo $x \in D$. Esboço da prova:

$$|f(x)| \leq B \Rightarrow -B \leq f(x) \leq B$$

$$b_1 \leq f(x) \leq b_2 \Rightarrow -|b_1| \leq f(x) \leq |b_2| \overset{*}{\Rightarrow} -B \leq f(x) \leq B \Rightarrow |f(x)| \leq B$$

* Defina $B = \max\{|b_1|, |b_2|\}$.

Exemplo 2.4.2 Sejam f e g duas funções com domínio D que assumem valores em $\mathbb{R}$. Suponha que f e g são limitadas.
(a) Se $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in D$, então $\sup f(D) \leq \sup g(D)$. Para estabelecer esse fato, utilize o raciocínio adotado em 2.4.1(b). Observação: $\sup f(D)$ também é denotado por

$$\sup_{x \in D} f(x),\ \sup_{x} f(x) \text{ e } \sup f.$$

(b) As hipóteses adotadas no item anterior não permitem que se estabeleça alguma relação entre $\sup f(D)$ e $\inf g(D)$. A título de ilustração, assuma que $f(x) = x^2$, $g(x) = x$ e $D = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\}$. Logo, $\sup f = 1 > 0 = \inf g$.
(c) Suponha que $f(x) \leq g(y)$ para todo $x \in D$ e todo $y \in D$. É possível mostrar que $\sup f(D) \leq \inf g(D)$. $\square$

A Propriedade de Arquimedes

Teorema 2.4.3 (A Propriedade de Arquimedes) Se $x \in \mathbb{R}$, então existe $n_x \in \mathbb{N}$ tal que $x < n_x$.

Prova. Dado um número real x, suponha que não exista n_x com a propriedade desejada. Assim sendo, $x \geq n$ para todo $n \in \mathbb{N}$; consequentemente, x é uma cota superior de $\mathbb{N}$. Desta forma, 2.3.6 implica que $\mathbb{N}$ possui um supremo $u \in \mathbb{R}$. Observe que $u - 1$ não pode ser uma cota superior de $\mathbb{N}$. Logo, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $u - 1 < m$. Todavia, essa desigualdade é equivalente a $u < m + 1$ e $m + 1$ também pertence a $\mathbb{N}$. Contudo, isso viola a hipótese de que u é o supremo de $\mathbb{N}$. $\square$

Corolário 2.4.4 Se $S = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$, então $\inf S = 0$.

Corolário 2.4.5 Se $t > 0$, então existe $n_t \in \mathbb{N}$ tal que $0 < 1/n_t < t$.

Corolário 2.4.6 Se $y > 0$, então existe $n_y \in \mathbb{N}$ tal que $n_y - 1 \leq y < n_y$.

A existência de $\sqrt{2}$

Teorema 2.4.7 Existe um número real positivo x tal que $x^2 = 2$.

Prova. Defina $S = \{s \in \mathbb{R} : s \geq 0 \text{ e } s^2 < 2\}$. Como $1 \in S$, S não é vazio. Adicionalmente,

$$s \in S \Rightarrow s^2 < 9 \Rightarrow s < 3.$$

Logo, S é limitado superiormente. Assim sendo, S possui um supremo, o qual doravante será denotado por x. Provaremos que $x^2 = 2$ mostrando a impossibilidade dos casos (i) $x^2 < 2$ e (ii) $x^2 > 2$.

Considere o caso (i). Seja y qualquer real positivo que satisfaz $y^2 < 2$. Seja n um natural que satisfaz $n > (2y + 1)/(2 - y^2)$. Desta forma,

$$\frac{1}{n} < \frac{2 - y^2}{2y + 1} \Rightarrow \frac{2y}{n} + \frac{1}{n} < 2 - y^2 \Rightarrow y^2 + \frac{2y}{n} + \frac{1}{n} < 2 \Rightarrow$$
$$y^2 + \frac{2y}{n} + \frac{1}{n^2} < 2 \Rightarrow \left(y + \frac{1}{n}\right)^2 < 2.$$

Logo, $(y + 1/n) \in S$. Tendo em vista que $y < (y + 1/n)$, y não é o supremo de S.

Adota-se raciocínio similar no caso (ii). Seja, y qualquer real positivo que satisfaz $y^2 > 2$ e n um natural tal que $n > 2y/(y^2 - 2)$. Assim sendo,

$$\frac{1}{n} < \frac{y^2 - 2}{2y} \Rightarrow \frac{2y}{n} < y^2 - 2 \Rightarrow 2 < y^2 - \frac{2y}{n} < y^2 - \frac{2y}{n} + \frac{1}{n^2} = \left(y - \frac{1}{n}\right)^2.$$

Desta forma, se $s \in S$, então

$$s^2 < 2 < \left(y - \frac{1}{n}\right)^2 \Rightarrow s < y - \frac{1}{n}.$$

Logo, $(y - 1/n)$ é uma cota superior de S. Como $(y - 1/n) < y$, $y \neq \sup S$. □

Comentários (1) Abordagem similar estabelece a existência de outros números reais. (2) Considere o conjunto $T = \{t \in \mathbb{Q} : t \geq 0 \text{ e } t^2 < 2\}$. Se assumíssemos que $\mathbb{Q}$ é completo (no sentido do Axioma 2.3.6), então poderíamos utilizar a prova acima para estabelecer que existe $y \in \mathbb{Q}$ tal que $y^2 = 2$. Contudo, já mostramos que não existe um racional com essa propriedade. Logo, conclui-se que o conjunto $\mathbb{Q}$ não é completo.

A Densidade dos Números Racionais em $\mathbb{R}$

Teorema 2.4.8 Se x e y são números reais que satisfazem $x < y$, então existe um número $r \in \mathbb{Q}$ tal que $x < r < y$.

Prova. Inicialmente, assuma que $x > 0$. Como $y - x > 0$, o Corolário 2.4.5 implica que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $0 < 1/n < y - x$. Logo, $nx + 1 < ny$. Aplique o Corolário 2.4.6 para concluir que existe $m \in \mathbb{N}$ que satisfaz $m - 1 \leq nx < m$; observe que $m \leq nx + 1$. Desta forma,

$$nx < m \leq nx + 1 < ny \Rightarrow nx < m < ny \Rightarrow x < m/n < y.$$

Como $m/n \in \mathbb{Q}$, temos o resultado desejado.

Resta considerar o caso em que $x \leq 0$. Se $x = 0$, então $y > 0$. Logo, basta aplicar o Corolário 2.4.5 para concluir que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $x = 0 < 1/m < y$. Assuma agora que $x < 0$. Se $y > 0$, então $x < 0 < y$. Se $y = 0$, então existe $m' \in \mathbb{N}$ que satisfaz $y = 0 < 1/m' < -x$, o que implica que $x < -1/m' < y$. Por fim, Se $x < 0$ e $y < 0$, então o parágrafo anterior estabelece que existe $r \in \mathbb{Q}$ com a propriedade que $-y < r < -x$. Assim sendo, $x < -r < y$. □

Corolário 2.4.9 Se x e y são números reais que satisfazem $x < y$, então existe um número irracional z tal que $x < z < y$.

Comentário Se $r \in \mathbb{Q}$ e $z = r\sqrt{2}$, então z é irracional. Caso contrário, teríamos inteiros p_z, q_z, p_r e q_r, todos diferentes de 0, tais que

$$\frac{p_z}{q_z} = \frac{p_r}{q_r}\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{2} = \frac{p_z q_r}{q_z p_r},$$

de onde se conclui que $\sqrt{2}$ seria um número racional. Evidentemente, é possível substituir $\sqrt{2}$ por um irracional qualquer e obter uma conclusão similar.

2.5 Intervalos

Sejam a e b dois reais que satisfazem $a < b$. O **intervalo aberto** determinado por a e b é o conjunto $\{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$. Esse conjunto é usualmente denotado por (a, b). Observe que, em tal contexto, (a, b) não é um elemento de $\mathbb{R}^2$. Os números a e b são denominados de **extremos**. Listam-se a seguir outros tipos de intervalos:
intervalo fechado $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$;
intervalos semiabertos (ou **semifechados**) $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ e $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$;
intervalos abertos infinitos $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$ e $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$;
intervalos fechados infinitos $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$ e $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$.

Observe que ∞ e $-\infty$ não são elementos de $\mathbb{R}$. No caso dos intervalos aberto, fechado e semiabertos, a diferença $b - a$ corresponde ao **comprimento** do intervalo. Vale ressaltar que $(a, a) = \emptyset$, $[a, a] = \{a\}$ e $(a, a] = [a, a) = \emptyset$.

Caracterização dos Intervalos

Teorema 2.5.1 (Caracterização dos Intervalos) Se S é um subconjunto de $\mathbb{R}$ que contém pelo menos dois elementos e tem a propriedade

$$x, y \in S \;\;\&\;\; x < y \Rightarrow [x, y] \subseteq S,$$

então S é um intervalo.

Intervalos Aninhados

Uma sequência I_n, $n \in \mathbb{N}$, de intervalos é dita ser **aninhada** se $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \cdots \supseteq I_n \supseteq I_{n+1} \supseteq \cdots$; ver Figura 2.5.1 (p. 46). Por exemplo, as três sequências $I_n = [0, 1/n]$, $J_n = (0, 1/n)$ e $K_n = (n, \infty)$, $n \in \mathbb{N}$, são aninhadas. É possível mostrar que $\cap_{n=1}^{\infty} I_n = \{0\}$, $\cap_{n=1}^{\infty} J_n = \emptyset$ e $\cap_{n=1}^{\infty} K_n = \emptyset$.

Teorema 2.5.2 (Propriedade dos Intervalos Aninhados) Se $I_n = [a_n, b_n]$, $n \in \mathbb{N}$, é uma sequência aninhada de intervalos fechados e limitados, então existe um número $\gamma \in I_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Prova. Como $I_n \subseteq I_1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq b_1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim sendo, o conjunto $\{a_k : k \in \mathbb{N}\}$ é limitado superiormente. Seja γ o seu supremo. Claramente, $\gamma \geq a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Mostraremos agora que $\gamma \leq b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Fixe m e considere o conjunto $\{a_k : k \in \mathbb{N}\}$, onde k é um número qualquer. Suponha que $k \geq m$. Logo, $I_k \subseteq I_m$, o que implica $a_k \leq b_k \leq b_m$. Assuma agora que $k < m$. Nesse caso, $I_m \subseteq I_k$. Desta forma, $a_k \leq b_m$. Como m pode ser qualquer número natural, $a_k \leq b_m$ para quaisquer k e m naturais. Logo, b_m é uma cota superior de $\{a_k : k \in \mathbb{N}\}$. Como γ é a menor cota superior desse conjunto, $\gamma \leq b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por fim, como $a_n \leq \gamma \leq b_n$, $\gamma \in I_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Teorema 2.5.3 Se $I_n = [a_n, b_n]$, $n \in \mathbb{N}$, é uma sequência aninhada de intervalos fechados e limitados tal que $\inf\{b_n - a_n : n \in \mathbb{N}\} = 0$, então o número $\gamma \in I_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ é único.

A Incontabilidade de $\mathbb{R}$

Teorema 2.5.4 O conjunto $\mathbb{R}$ é incontável.

Prova. É suficiente mostrar que o conjunto $I = [0, 1]$ é incontável. A prova será feita por contradição. Assuma que I é contável. Logo, podemos enumerar os seus elementos e escrever $I = \{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$. Seja I_1 um intervalo fechado contido em I tal que $x_1 \notin I_1$. Em seguida, selecione um intervalo fechado $I_2 \subseteq I_1$ tal que $x_2 \notin I_2$. Repita esse procedimento de forma a ter uma sequência aninhada I_n, $n \in \mathbb{N}$, tal que $x_n \notin I_n$ para todo n. Agora, observe que

$$x_n \notin \cap_{k=1}^{\infty} I_k, \, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \cap_{k=1}^{\infty} I_k = \emptyset.$$

Como a última igualdade contradiz o Teorema 2.5.2, o conjunto I não pode ser contável.$\square$