

UFRJ

Análise Matemática para Economistas

Professor Alexandre B. Cunha

Exercícios Resolvidos

Comentários

(1) Uma resposta que se inicia com a expressão **Esboço** é uma resposta incompleta. As demais estão completas. O mesmo comentário vale para um trecho de resposta qualificado como **Esboço**.

(2) Os símbolos \triangleright e \triangleleft denotam, respectivamente, o começo e o fim de uma “dica”. Uma “dica” não faz parte da resposta propriamente dita. Contudo, ela conterá informação sobre algo que o seu professor utilizou para resolver o problema ou alguma sugestão sobre como abordá-lo.

1.1

(2) Mostraremos que (i) $A \setminus (B \cap C) \subseteq (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ e (ii) $(A \setminus B) \cup (A \setminus C) \subseteq A \setminus (B \cap C)$. Considere o item (i). Se $x \in A \setminus (B \cap C)$, então $x \in A$ e $x \notin B \cap C$. Porém, a afirmativa $x \notin B \cap C$ é equivalente a $[x \notin B \text{ ou } x \notin C]$. Logo, pode-se concluir que $[x \in A \text{ e } x \notin B]$ ou $[x \in A \text{ e } x \notin C]$. Desta forma, $x \in A \setminus B$ ou $x \in A \setminus C$. Assim sendo, $x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$. No tocante ao item (ii), seja x um elemento genérico de $(A \setminus B) \cup (A \setminus C)$. Logo, $[x \in A \text{ e } x \notin B]$ ou $[x \in A \text{ e } x \notin C]$. Contudo, isso implica que $x \in A$ e $[x \notin B \text{ ou } x \notin C]$. Desta forma, $x \in A$ e $x \notin B \cap C$. Por tal motivo, $x \in A \setminus (B \cap C)$.

(15) \triangleright Tendo em vista o enunciado do exercício, a bijeção a ser construída pode ser a mais simples possível. Assim sendo, utilizaremos uma função linear. \triangleleft

\triangleright Para se orientar, esboce o gráfico da função a ser construída. \triangleleft

Considere a função com domínio em A (e contradomínio contido em \mathbb{R}) dada por

$$f(x) = \frac{-a}{b-a} + \frac{1}{b-a}x.$$

Observe que $R(f) \subseteq B$, pois

$$0 = \frac{-a}{b-a} + \frac{1}{b-a}a < \frac{-a}{b-a} + \frac{1}{b-a}x < \frac{-a}{b-a} + \frac{1}{b-a}b = 1.$$

Logo, podemos assumir que o contradomínio de f é igual a B . Resta mostrar que f é (i) injetiva e (ii) sobrejetiva. Como

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow \frac{-a}{b-a} + \frac{1}{b-a}x_1 \neq \frac{-a}{b-a} + \frac{1}{b-a}x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2),$$

f é injetiva. No tocante ao item (ii), seja y um elemento qualquer de B . Tendo em vista que

$$y = \frac{-a}{b-a} + \frac{1}{b-a}x \iff x = a + (b-a)y,$$

para todo $\bar{y} \in \mathbb{R}$ existe $\bar{x} \in \mathbb{R}$ tal que \bar{y} e \bar{x} satisfazem à penúltima igualdade. Para concluir, é preciso mostrar que se $\bar{y} \in B$, então $\bar{x} \in A$. Porém,

$$0 < \bar{y} < 1 \Rightarrow a = a + (b - a)0 < a + (b - a)\bar{y} < a + (b - a)1 = b \Rightarrow a < \bar{x} < b.$$

(17a) Denote o conjunto $f^{-1}(f(E))$ por X . Mostraremos que (i) $E \subseteq X$ e (ii) $X \subseteq E$. Começaremos por (i). Observe que

$$x \in E \Rightarrow f(x) \in f(E) \Rightarrow x \in f^{-1}(f(E)) = X.$$

Logo, $E \subseteq X$. Com relação ao item (ii), é suficiente mostrar que se $x \notin E$, então $x \notin X$. Suponha que $x_1 \notin E$. Como f é injetiva, não existe $x_2 \in E$ tal que $x_2 \neq x_1$ e $f(x_2) = f(x_1)$. Consequentemente, $f(x_1) \notin f(E)$. Desta forma, $x_1 \notin f^{-1}(f(E))$.

No tocante ao exemplo solicitado, considere a função $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^2$. Ela não é injetiva, pois $g(-3) = g(3)$. Seja E o conjunto $\{2\}$. Observe que $g(E) = \{4\}$ e $g^{-1}(g(E)) = \{-2, 2\} \neq E$.

(17b) Denote o conjunto $f(f^{-1}(H))$ por Y . Mostraremos que (i) $H \subseteq Y$ e (ii) $Y \subseteq H$. Considere inicialmente o item (i). Seja y um elemento qualquer de H . Como f é sobrejetiva, existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$. Evidentemente, $x \in f^{-1}(H)$. Logo, $f(x) \in f(f^{-1}(H))$. Desta forma, $y \in Y$. Considere agora a parte (ii). Seja y um elemento genérico de Y . Logo, y faz parte da imagem de $f^{-1}(H)$. Assim sendo, existe $x \in f^{-1}(H)$ tal que $f(x) = y$. Adicionalmente, $f(x) \in H$. Como $y = f(x)$, $y \in H$.

No tocante ao exemplo solicitado, considere a função g definida no exercício anterior. Ela não é sobrejetiva, pois não existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = -3$. Seja H o conjunto $\{-1, 4\}$. Assim sendo, $f^{-1}(H) = \{-2, 2\}$ e $f(f^{-1}(H)) = \{4\} \neq H$.

(19) Denote a composição $g \circ f$ por h . Mostraremos que (i) h é injetiva e (ii) h é sobrejetiva. Sejam a_1 e a_2 dois elementos distintos de A . Como f é injetiva, $f(a_1) \neq f(a_2)$. Agora, utilize o fato que g também é injetiva para concluir que $h(a_1) = g(f(a_1)) \neq g(f(a_2)) = h(a_2)$. Logo, h é injetiva. Com respeito ao item (ii), seja c um elemento de C . Como g é sobrejetiva, existe $b \in B$ tal que $g(b) = c$. Por outro lado, o fato de que f também é sobrejetiva implica que existe $a \in A$ tal que $f(a) = b$. Tendo em vista que $h(a) = g(f(a)) = c$, conclui-se que h é sobrejetiva.

(21) \triangleright Desenhe um diagrama com os conjuntos A , B , C e H e setas representando as funções envolvidas para se orientar. \triangleleft

Inicialmente, observe que

$$(g \circ f)^{-1}(H) = \{a \in A : g(f(a)) \in H\}.$$

Por outro lado,

$$g^{-1}(H) = \{b \in B : g(b) \in H\}. \quad (1)$$

Adicionalmente, se $S \subseteq B$, então

$$f^{-1}(S) = \{a \in A : f(a) \in S\}.$$

Como $g^{-1}(H) \subseteq B$, podemos concluir que

$$f^{-1}(g^{-1}(H)) = \{a \in A : f(a) \in g^{-1}(H)\}.$$

Combine a última igualdade com (1). Esse procedimento estabelece que

$$f^{-1}(g^{-1}(H)) = \{a \in A : f(a) \in \{b \in B : g(b) \in H\}\}. \quad (2)$$

Contudo,

$$f(a) \in \{b \in B : g(b) \in H\} \iff g(f(a)) \in H.$$

Combine a última afirmativa com (2) para concluir que

$$f^{-1}(g^{-1}(H)) = \{a \in A : g(f(a)) \in H\}.$$

1.2

(16) Seja $P(n)$ a afirmativa $[n^2 < 2^n]$. Como $1^2 < 2^1$, $P(1)$ é verdadeira. Adicionalmente, $2^2 \geq 2^2$, $3^2 \geq 2^3$ e $4^2 \geq 2^4$, $P(2)$, $P(3)$ e $P(4)$ são falsas; como $5^2 < 2^5$, $P(5)$ é verdadeira.

Mostraremos agora que

$$n \geq 5 \Rightarrow [P(n) \Rightarrow P(n+1)].$$

Assuma que $P(n)$ é verdadeira. Assim sendo,

$$\begin{aligned} 2^n &> n^2 \Rightarrow 2^{n+1} > 2n^2 = n^2 + n^2 = (n^2 + 2n + 1) + (n^2 - 2n - 1) \Rightarrow \\ 2^{n+1} &> (n+1)^2 + (n^2 - 2n - 1) \geq (n+1)^2 + (n^2 - 2n - 8) \Rightarrow \\ 2^{n+1} &> (n+1)^2 + (n-4)(n+2). \end{aligned}$$

Como $n \geq 5$, $(n-4)(n+2) > 0$. Logo, $(n+1)^2 + (n-4)(n+2) > (n+1)^2$. Concluimos então que $2^{n+1} > (n+1)^2$.

Desta forma, $P(n)$ é verdadeira para $n = 1$ e todo $n \geq 5$.

1.3

(4) Seja S o conjunto $\{15, 17, 19, 21, \dots\}$. Considere a função com domínio em \mathbb{N} (e contradomínio contido em \mathbb{R}) dada por

$$f(n) = 2n + 13.$$

Observe que $f(n)$ é um número natural ímpar. Ademais, como $n \geq 1$, $f(n) \geq 15$. Logo, podemos assumir que S é o contradomínio de f . Tendo em vista que

$$n_1 \neq n_2 \Rightarrow 2n_1 + 13 \neq 2n_2 + 13 \Rightarrow f(n_1) \neq f(n_2),$$

f é injetiva. Como

$$s = 2n + 13 \iff n = \frac{s - 13}{2},$$

para todo $\bar{s} \in S$ existe um número real \bar{n} tal que \bar{s} e \bar{n} satisfazem à penúltima igualdade. Contudo, os fatos de que \bar{s} é um natural ímpar e $\bar{s} \geq 15$ implicam que $s - 13$ é um natural par. Logo, $\frac{s-13}{2} \in \mathbb{N}$; assim sendo, $\bar{n} \in \mathbb{N}$. Podemos então concluir que f é sobrejetiva.

(12) Seja $\mathcal{P}(\mathbb{N}_m)$ o conjunto de todos os subconjuntos de \mathbb{N}_m . O exercício 1.3.11 implica que $\mathcal{P}(\mathbb{N}_m)$ é finito. Logo, $\mathcal{P}(\mathbb{N}_m)$ é contável e, como consequência do Teorema 1.3.12, $U_{m=1}^{\infty} \mathcal{P}(\mathbb{N}_m)$ é contável. Suponha agora que a inclusão $\mathcal{F}(\mathbb{N}) \subseteq U_{m=1}^{\infty} \mathcal{P}(\mathbb{N}_m)$ se verifique. Nesse caso, o Teorema 1.3.9.a implica que $\mathcal{F}(\mathbb{N})$ é contável. Assim sendo, resta mostrar que a inclusão em questão é verdadeira. Seja A um elemento qualquer de $\mathcal{F}(\mathbb{N})$. Como A é finito, existe um número natural k tal que $k \geq a$ para todo $a \in A$. Logo, $A \subseteq \mathbb{N}_k$. Desta forma, A é integrante da família $\mathcal{P}(\mathbb{N}_k)$, a qual por sua vez está contida em $U_{m=1}^{\infty} \mathcal{P}(\mathbb{N}_m)$. Assim sendo, $A \in U_{m=1}^{\infty} \mathcal{P}(\mathbb{N}_m)$.

2.2

(2) Observe que

$$|a + b| = |a| + |b| \iff |a + b|^2 = (|a| + |b|)^2.$$

Agora, utilize as propriedades do valor absoluto para concluir que

$$\begin{aligned} |(a + b)^2| &= |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 \iff (a + b)^2 = a^2 + 2|ab| + b^2 \iff \\ a^2 + 2ab + b^2 &= a^2 + 2|ab| + b^2 \iff ab = |ab|. \end{aligned}$$

Contudo, a definição de valor absoluto implica que $ab = |ab|$ se e somente $ab \geq 0$. Assim sendo,

$$|a + b| = |a| + |b| \iff ab \geq 0.$$

(14) \triangleright Desenhe a linha reta e as vizinhanças e se convença de que $\gamma = \min\{\varepsilon, \delta\}$ no caso da interseção e $\gamma = \max\{\varepsilon, \delta\}$ no caso da união. \triangleleft

Assuma, sem perda de generalidade, que $\varepsilon \leq \delta$. Observe que $V_{\varepsilon}(a) \subseteq V_{\delta}(a)$, pois se $|x - a| < \varepsilon$, então $|x - a| < \delta$. Logo, $V_{\varepsilon}(a) \cup V_{\delta}(a) = V_{\delta}(a)$ e $V_{\varepsilon}(a) \cap V_{\delta}(a) = V_{\varepsilon}(a)$.

Considere agora o caso da união. Faça $\gamma = \delta$. Isso implica que, conforme solicitado, $V_{\varepsilon}(a) \cup V_{\delta}(a) = V_{\gamma}(a)$. Para o caso da interseção, faça $\gamma = \varepsilon$, de onde se conclui que $V_{\varepsilon}(a) \cap V_{\delta}(a) = V_{\gamma}(a)$.

(15) \triangleright Desenhe a linha reta, marque os pontos a e b e o ponto médio entre eles e se convença de que qualquer $\varepsilon \leq (b - a)/2$ será uma escolha adequada. \triangleleft

Assuma, sem perda de generalidade, que $a < b$. Defina $\varepsilon = (b - a)/2$. Observe que

$$\begin{aligned} x \in V_\varepsilon(a) &\Rightarrow |x - a| < \varepsilon \Rightarrow x - a < \varepsilon \Rightarrow x - a < \frac{b - a}{2} \Rightarrow \\ x - b &< \frac{b - a}{2} + a - b \Rightarrow b - x > b - a - \frac{b - a}{2} = \frac{b - a}{2} \Rightarrow \\ b - x &> \varepsilon \Rightarrow |x - b| > \varepsilon \Rightarrow x \notin V_\varepsilon(b) \Rightarrow V_\varepsilon(a) \cap V_\varepsilon(b) = \emptyset. \end{aligned}$$

(16a) **Esboço** Assuma, sem perda de generalidade, que $a \leq b$. Logo, $\min\{a, b\} = a$ e $\max\{a, b\} = b$.

$$\begin{aligned} (a + b + |a - b|) &= a + b + b - a = 2b \\ (a + b - |a - b|) &= a + b - b + a = 2a \end{aligned}$$

(16b) Suponha que

$$\min\{a, b\} < c. \quad (3)$$

Logo, $\min\{\min\{a, b\}, c\} = \min\{a, b\}$. Por outro lado, (3) implica que $a < c$ ou $b < c$. Desta forma, $\min\{a, b, c\}$ não poderá ser igual a c , de onde se conclui que $\min\{a, b, c\} = \min\{a, b\}$. Considere agora caso em que (3) não se verifica. Em tal contexto, $\min\{\min\{a, b\}, c\} = c$. Ademais, $a \geq c$ e $b \geq c$; assim sendo, $\min\{a, b, c\} = c$.

2.3

(5) Seja T o conjunto $\{t \in \mathbb{R} : -t \in S\}$. É preciso mostrar que $\sup T = -s_0$, onde s_0 denota $\inf S$.

Esboço $-s_0$ é cota superior de T :

$$s_0 \leq s, \forall s \in S \Rightarrow -s_0 \geq -s, \forall s \in S \Rightarrow -s_0 \geq t, \forall t \in T.$$

$-s_0$ é a menor cota superior de T :

$$v < -s_0 \Rightarrow s_0 < -v \Rightarrow \exists s_v \in S : s_0 \leq s_v < v \Rightarrow \exists (-s_v) \in T : -s_v > v$$

(9) Para simplificar a notação, denote $\max\{\sup A, \sup B\}$ por c . Seja x qualquer elemento de $A \cup B$. Se $x \in A$, então $x \leq \sup A \leq c$; se $x \in B$, então $x \leq \sup B \leq c$. Concluimos então que $x \leq c$. Logo, c é uma cota superior de $A \cup B$. Raciocínio similar estabelece que $x \geq \min\{\inf A, \inf B\}$. Assim sendo, $A \cup B$ é um conjunto limitado.

Para encerrar, mostraremos que c é a menor cota superior de $A \cup B$. Sem perda de generalidade, assuma que $\sup A \leq \sup B$. Seja y um número qualquer menor que

c. Como $c = \sup B$, então existe $s_y \in B$ tal que $y < s_y$. Como $s_y \in A \cup B$, concluímos que y não é uma cota superior de $A \cup B$. Assim sendo, c é a menor cota superior de $A \cup B$.

$$(10) \triangleright x \in S_0 \Rightarrow x \in S \Rightarrow \inf S \leq x \leq \sup S \triangleleft$$

(11) Inicialmente, observe que $\sup\{s^*, u\} \geq u$ e $\sup\{s^*, u\} \geq s^* \geq s$ para todo $s \in S$. Desta forma, $\sup\{s^*, u\}$ é uma cota superior de $S \cup \{u\}$. Para concluir o exercício, basta mostrar que se y é um número real menor que $\sup\{s^*, u\}$, então y não é uma cota superior de $S \cup \{u\}$. De fato, se $y < \sup\{s^*, u\}$, então $y < s^*$ ou $y < u$. Se a última desigualdade se verifica, então y não é uma cota superior de $S \cup \{u\}$. Por outro lado, se $y < s^*$, então existe $s' \in S$ tal que $y < s'$. Como s' também pertence a $S \cup \{u\}$, conclui-se que y não é uma cota superior de $S \cup \{u\}$.

Obs.: a resposta acima não utiliza a hipótese de que $s^* \in S$.

(12) **Esboço** $P(n)$: um conjunto com n elementos contém o seu supremo. A afirmativa $P(1)$ é trivialmente verdadeira. Utilize o exercício anterior para concluir que $[P(n) \Rightarrow P(n+1)]$.

2.4

(1) Seja S o conjunto em questão. Claramente, $s \leq 1$ para todo $s \in S$. Logo, 1 é uma cota superior para S . Seja x qualquer número menor do que 1. Basta mostrar que x não é uma cota superior de S . Seja n_x um natural qualquer tal que $n_x > (1-x)^{-1}$. Assim sendo,

$$1-x > \frac{1}{n_x} \Rightarrow 1 - \frac{1}{n_x} > x.$$

(2) \triangleright

$$-1 \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{1} \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \leq \frac{1}{1} - \frac{1}{m} \leq 1 \triangleleft$$

Denote $\inf S$ e $\sup S$ por, respectivamente, a e b . Mostraremos que $a = -1$ e $b = 1$. Considere inicialmente o supremo. Observe que

$$1 \geq \frac{1}{n} \geq \frac{1}{1} - \frac{1}{m}.$$

Logo, 1 é uma cota superior de S . Seja x um número real menor que 1. É preciso mostrar que x não é uma cota superior de S . Dado x , escolha $m_x \in \mathbb{N}$ de forma que $m_x > (1-x)^{-1}$. Assim sendo,

$$m_x > \frac{1}{1-x} \Rightarrow \frac{1}{m_x} < 1-x \Rightarrow x < 1 - \frac{1}{m_x} \in S.$$

No tocante ao ínfimo,

$$1 \geq \frac{1}{m} \Rightarrow -1 \leq -\frac{1}{m} \Rightarrow -1 \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{m}.$$

Desta forma, -1 é uma cota inferior de S . Resta mostrar que se y é um número real maior que -1 , então y não é uma cota inferior de S . Dado y , escolha $n_y \in \mathbb{N}$ de forma que $n_y > (1 + y)^{-1}$. Assim sendo,

$$n_y > \frac{1}{1 + y} \Rightarrow 1 + y > \frac{1}{n_y} \Rightarrow y > \frac{1}{n_y} - 1 \in S.$$

(5) **Esboço** Faça $S = f(X)$ no Exemplo 2.4.1(a). Logo,

$$a + \sup f(X) = \sup\{a + f(X)\}.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} a + f(X) &= \{a + y : y \in f(X)\} = \{a + f(x) : x \in X\} \Rightarrow \\ \sup\{a + f(X)\} &= \sup\{a + f(x) : x \in X\}. \end{aligned}$$

Desta forma,

$$a + \sup\{f(x) : x \in X\} = a + \sup f(X) = \sup\{a + f(X)\} = \sup\{a + f(x) : x \in X\}.$$

Com relação à parte referente ao ínfimo, utilize o raciocínio apresentado no livro texto para mostrar que $a + \inf f(X) = \inf\{a + f(X)\}$ e em seguida aplique um argumento similar ao que foi desenvolvido nesta resposta. Outra opção consiste em considerar a função $g(x) = -f(x)$ e aplicar o Exercício 2.3.5 repetidas vezes. Como (i) $-a + \sup g(X) = \sup\{-a + g(X)\}$ (acabamos de provar este ponto), (ii) $g(X) = -f(X)$ e (iii) $\sup g(X) = -\inf f(X)$, podemos concluir que

$$-[a + \inf\{a + f(x) : x \in X\}] = -[a + \inf f(X)] = -a - \inf f(X) = -a + \sup g(X).$$

Ademais,

$$\sup\{-a + g(X)\} = \sup\{-(a + y) : y \in f(X)\} = -\inf\{a + y : y \in f(X)\}.$$

Assim sendo,

$$-[a + \inf\{a + f(x) : x \in X\}] = -\inf\{a + y : y \in f(X)\} = -\inf\{a + f(x) : x \in X\}.$$

(6) Notação: $S = A + B$; $\bar{a} = \sup A$ e $\hat{a} = \inf A$; \bar{b} , \hat{b} , \bar{s} , \hat{s} : significado equivalente.

Mostraremos que: (i) $\bar{s} = \bar{a} + \bar{b}$ e (ii) $\hat{s} = \hat{a} + \hat{b}$.

Condição (i) Como $a \leq \bar{a}$ para todo $a \in A$ e $b \leq \bar{b}$ para todo $b \in B$, podemos concluir que

$$a + b \leq \bar{a} + \bar{b}, \forall a \in A, \forall b \in B.$$

Logo, $s \leq \bar{a} + \bar{b}$ para todo $s \in S$. Logo, $\bar{a} + \bar{b}$ é uma cota superior de S . Seja x qualquer número menor do que $\bar{a} + \bar{b}$. É preciso mostrar que x não é uma cota superior de S . Como $x < \bar{a} + \bar{b}$, existe um número $\varepsilon > 0$ tal que

$$x < \bar{a} + \bar{b} - 2\varepsilon \Rightarrow x < (\bar{a} - \varepsilon) + (\bar{b} - \varepsilon).$$

Tendo em vista que $\bar{a} = \sup A$, existe $a_1 \in A$ tal que $a_1 > \bar{a} - \varepsilon$. Similarmente, existe $b_1 \in B$ tal que $b_1 > \bar{b} - \varepsilon$. Assim sendo,

$$x < a_1 + b_1 \in S.$$

Logo, x não é uma cota superior de S .

Condição (ii) **Esboço** [raciocínio similar ao utilizado para (i)]

$$\hat{a} + \hat{b} \leq a + b, \forall a \in A, \forall b \in B$$

$\hat{a} + \hat{b}$ é cota inferior de S Se $y > \hat{a} + \hat{b}$, então existe $\varepsilon > 0$ tal que $y > (\hat{a} + \varepsilon) + (\hat{b} + \varepsilon)$. Como \hat{a} e \hat{b} são ínfimos de..., $y > a_2 + b_2 \in S$.

(7) **Esboço**

$$f(x) \leq \sup_t f(t) \quad \& \quad g(x) \leq \sup_t g(t) \Rightarrow f(x) + g(x) \leq \sup_t f(t) + \sup_t g(t)$$

$$\inf_t f(t) \leq f(x) \quad \& \quad \inf_t g(t) \leq g(x) \Rightarrow \inf_t f(t) + \inf_t g(t) \leq f(x) + g(x)$$

Exemplo “igualdades”: $X = \{x \in R : -1 \leq x \leq 1\}$, $f(x) = g(x) = x$.

Exemplo “desigualdades”: $X = \{x \in R : -1 \leq x \leq 1\}$, $f(x) = x$ e $g(x) = -x$.

Obs.: para entender a diferença entre as questões 6 e 7, considere o exemplo “desigualdades”. Neste caso, $f(X) = g(X) = X$, $(f + g)(X) = \{0\}$ e $f(X) + g(X) = \{x \in R : -2 \leq x \leq 2\}$.

(11) Seja (\bar{x}, \bar{y}) um elemento genérico de $X \times Y$. Observe que

$$h(\bar{x}, \bar{y}) \leq \sup_y h(\bar{x}, y) = F(\bar{x}) \leq \sup_x F(x).$$

Logo, $\sup_x F(x)$ é uma cota superior de h . Como $\sup_{x,y} h(x, y)$ é a menor cota superior de h ,

$$\sup_{x,y} h(x, y) \leq \sup_x F(x). \quad (4)$$

Por outro lado,

$$h(\bar{x}, \bar{y}) \leq \sup_{x,y} h(x, y).$$

Assim sendo, $\sup_{x,y} h(x, y)$ é uma cota superior de $\{h(\bar{x}, y) : y \in Y\}$. Tendo em vista que $F(\bar{x})$ é a menor cota superior do conjunto em questão,

$$F(\bar{x}) \leq \sup_{x,y} h(x, y).$$

Desta forma, $\sup_{x,y} h(x, y)$ é uma cota superior de F . Como $\sup_x F(x)$ é a menor cota superior de F ,

$$\sup_x F(x) \leq \sup_{x,y} h(x, y).$$

Combine esta desigualdade com (4) para concluir que

$$\sup_x F(x) = \sup_{x,y} h(x, y).$$

Por fim, raciocínio similar estabelece que $\sup_y G(y) = \sup_{x,y} h(x, y)$.

(13) **Esboço** Pela Propriedade de Arquimedes (2.4.3), dado $y > 0$, existe n_y tal que $y^{-1} < n_y$. Utilize o princípio da indução para mostrar que $n < 2^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, $y^{-1} < 2^{n_y}$.

2.5

(7) Para economizar na notação, denote o conjunto $\cap_{n=1}^{\infty} I_n$ por A . Como $0 \in I_n$ para todo n , então $0 \in A$. Seja x um número real diferente de zero. Se $x < 0$, então $x \notin I_1$; logo, $x \notin A$. Se $x > 0$, então existe $n_x \in \mathbb{N}$ tal que $n_x > \frac{1}{x}$. Logo, $\frac{1}{n_x} < x$ e $x \notin I_{n_x}$. Assim sendo, $x \notin A$. Concluimos então que 0 é o único elemento de A . Logo, $A = \{0\}$.

3.1

(5d) \triangleright

$$\left| x_n - \frac{1}{2} \right| = \frac{5}{4n^2 + 6} < \varepsilon$$

\triangleright

$$\frac{5}{4n^2 + 6} < \varepsilon \iff 4n^2 + 6 > \frac{5}{\varepsilon} \iff 4n^2 > \frac{5}{\varepsilon} - 6 \iff n^2 > \frac{5}{4\varepsilon} - \frac{3}{2} \iff n > \sqrt{\frac{5}{4\varepsilon} - \frac{3}{2}} < \frac{5}{4\varepsilon}$$

Seja $K(\varepsilon)$ o primeiro natural maior que $5/(4\varepsilon)$. Assim sendo,

$$\begin{aligned} n &\geq K(\varepsilon) \Rightarrow n > \frac{5}{4\varepsilon} \Rightarrow n^2 > \frac{5}{4\varepsilon} \Rightarrow 4n^2 > \frac{5}{\varepsilon} \Rightarrow 4n^2 + 6 > \frac{5}{\varepsilon} \Rightarrow \\ \frac{4n^2 + 6}{5} &> \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \left| x_n - \frac{1}{2} \right| = \frac{5}{4n^2 + 6} < \varepsilon. \end{aligned}$$

(8) Inicialmente, observe que como $|x_n - 0| = ||x_n| - 0|$, podemos concluir que

$$|x_n - 0| < \varepsilon \iff ||x_n| - 0| < \varepsilon$$

para qualquer ε . Desta forma,

$$[n \geq K(\varepsilon) \Rightarrow |x_n - 0| < \varepsilon] \iff [n \geq K(\varepsilon) \Rightarrow ||x_n| - 0| < \varepsilon].$$

No tocante ao exemplo, considere a sequência definida por $x_n = (-1)^n$. Claramente, $|x_n| \rightarrow 1$, ao passo que (x_n) não converge.

3.2

(7) Não podemos utilizar o Teorema 3.2.3 devido ao fato de não se saber se (b_n) é ou não convergente.

Seja M um real tal que $|b_n| \leq M$ para todo n . Observe que

$$0 \leq |a_n b_n| \leq |a_n| M.$$

Use os Teoremas 3.2.9 e 3.2.3.a para concluir que $\lim(|a_n| M) = 0$. Em seguida, utilize o Teorema 3.2.7 (Teorema do Sanduíche) para mostrar que $\lim |a_n b_n| = 0$. Por fim, utilize o exercício 3.1.8 para concluir que $\lim(a_n b_n) = 0$.

(9) **Esboço**

$$y_n = \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \right) \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \Rightarrow y_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \Rightarrow$$

$$0 \leq y_n \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Aplique Teorema 3.2.7 para mostrar que $\lim(y_n) = 0$.

Defina z_n de acordo com

$$z_n = \sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1.$$

Observe que $\sqrt{n} y_n = 1/z_n$ (detalhes abaixo).

$$\begin{aligned} \sqrt{n} y_n &= \sqrt{n} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \right) = \sqrt{n^2 + n} - n = \left(\sqrt{n^2 + n} - n \right) \frac{\sqrt{n^2 + n} + n}{\sqrt{n^2 + n} + n} \Rightarrow \\ \sqrt{n} y_n &= \frac{n}{\sqrt{n^2 + n} + n} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1} = \frac{1}{z_n} \end{aligned}$$

Mostra-se a seguir que $\lim(z_n) = 2$. Dado $\varepsilon > 0$, defina $K(\varepsilon)$ como o primeiro natural maior que $(2\varepsilon + \varepsilon^2)^{-1}$. Assim sendo,

$$\begin{aligned} n &\geq K(\varepsilon) \Rightarrow n > \frac{1}{2\varepsilon + \varepsilon^2} = \frac{1}{(1 + \varepsilon)^2 - 1} \Rightarrow \frac{1}{n} < (1 + \varepsilon)^2 - 1 \Rightarrow \\ 1 &\leq 1 + \frac{1}{n} < (1 + \varepsilon)^2 \Rightarrow 1 \leq \sqrt{1 + \frac{1}{n}} < 1 + \varepsilon \Rightarrow 0 \leq \sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1 < \varepsilon \Rightarrow \\ 0 &\leq \sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1 - 2 < \varepsilon \Rightarrow 0 \leq z_n - 2 < \varepsilon \Rightarrow |z_n - 2| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Aplique o Teorema 3.2.3.b para concluir que

$$\lim(\sqrt{n} y_n) = \frac{1}{\lim(z_n)} = \frac{1}{2}.$$

(14) **Esboço**

$$b^n \leq a^n + b^n \leq 2b^n \Rightarrow b \leq (a^n + b^n)^{\frac{1}{n}} \leq 2^{\frac{1}{n}} b$$

O Exemplo 3.1.11(c) implica que

$$\lim \left(2^{\frac{1}{n}} \right) = 1. \quad (5)$$

Aplique os Teoremas 3.2.3.a e 3.2.7 para concluir que $(a^n + b^n)^{\frac{1}{n}} \rightarrow b$.

(17) É suficiente mostrar que a sequência (x_n) não possui cota superior. Dado $\varepsilon \in (0, L - 1)$, existe $K \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq K$, então

$$\left| L - \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| < \varepsilon.$$

Aplique a desigualdade triangular para concluir que

$$|L| \leq \left| L - \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| + \left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| < \left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| + \varepsilon \Rightarrow L < \frac{x_{n+1}}{x_n} + \varepsilon \Rightarrow \frac{x_{n+1}}{x_n} > L - \varepsilon.$$

Defina $C = L - \varepsilon$. Como $\varepsilon < L - 1$, $C > 1$. Assim sendo,

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} > C > 1. \quad (6)$$

Utilizaremos o Princípio da Indução para mostrar que

$$x_n \geq x_K C^{n-K} \quad (7)$$

para todo $n \geq K$. A desigualdade em questão é trivialmente satisfeita para $n = K$. Adicionalmente, (6) implica que $x_{n+1} \geq Cx_n$. Combine essa desigualdade com (7) para concluir que

$$x_{n+1} \geq Cx_K C^{n-K} = x_K C^{n+1-K}.$$

Seja A um número real qualquer. Se $A \leq 0$, então é trivial que A não é uma cota superior de (x_n) . Assuma que $A > 0$. Seja n um natural que satisfaz a condição

$$n > \max \left\{ \frac{\ln \left[\frac{A}{x_K C^{-K}} \right]}{\ln C}, K \right\}.$$

Assim sendo,

$$\begin{aligned} n &> \frac{\ln \left[\frac{A}{x_K C^{-K}} \right]}{\ln C} \Rightarrow n \ln C > \ln \left[\frac{A}{x_K C^{-K}} \right] \Rightarrow \\ \ln(C^n) &> \ln \left[\frac{A}{x_K C^{-K}} \right] \Rightarrow C^n > \frac{A}{x_K C^{-K}} \Rightarrow x_K C^{n-K} > A. \end{aligned}$$

Como $n > K$, podemos combinar a última desigualdade com (7) e para concluir que $x_n > A$. Desta forma, (x_n) não é limitada superiormente.

(18) **Esboço** \triangleright Aplique o Teorema 3.2.11 e o exercício anterior. \triangleleft Notação: (x_n) corresponde à sequência investigada.

(a)

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = a \left(\frac{n+1}{n} \right)^2 = a \left(1 + \frac{1}{n} \right)^2 \Rightarrow \lim \left(\frac{x_{n+1}}{x_n} \right) = a < 1 \Rightarrow \lim(x_n) = 0$$

(b)

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = b \left(\frac{n}{n+1} \right)^2 = b \left(\frac{1}{1+1/n} \right)^2 \Rightarrow \lim \left(\frac{x_{n+1}}{x_n} \right) = b > 1$$

Logo, (x_n) é divergente.

(c)

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{b^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{b^n} = \frac{b}{n+1} \Rightarrow \lim \left(\frac{x_{n+1}}{x_n} \right) = 0 \Rightarrow \lim(x_n) = 0$$

(d)

$$0 \leq x_n = \frac{n}{n} \times \frac{n-1}{n} \times \cdots \times \frac{2}{n} \times \frac{1}{n} \leq 1 \times 1 \times \cdots \times 1 \times \frac{1}{n} = \frac{1}{n}$$

Aplique o Teorema do Sanduíche para concluir que $\lim(x_n) = 0$.

3.3

(1) Seja $P(n)$ a afirmativa

$$0 \leq x_{n+1} \leq x_n \leq 8.$$

Utilizaremos o Princípio da Indução para mostrar que ela é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $x_1 = 8$ e $x_2 = 6$, $P(1)$ é verdadeira. Agora, assuma que $P(n)$ se verifique. Logo,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{1}{2}x_{n+1} \leq \frac{1}{2}x_n \leq 4 \Rightarrow 2 \leq \frac{1}{2}x_{n+1} + 2 \leq \frac{1}{2}x_n + 2 \leq 6 \Rightarrow \\ 2 &\leq x_{n+2} \leq x_{n+1} \leq 6 \Rightarrow 0 \leq x_{n+2} \leq x_{n+1} \leq 8. \end{aligned}$$

Tendo em vista que $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$, concluímos que (x_n) é decrescente e limitada (logo, ela é convergente). Por fim, denote o seu limite por x . Desta forma,

$$x = \frac{1}{2}x + 2 \Rightarrow \frac{1}{2}x = 2 \Rightarrow x = 4.$$

(2) \triangleright A equação $s^2 - 2s + 1 = 0$ tem uma única raiz, sendo ela igual a 1. \triangleleft

Esboço Utilize o Princípio da Indução para mostrar que $x_n > 1$ para todo n . Em seguida, utilize o fato de que $x_n > 0$ para mostrar que $x_{n+1} - x_n \leq 0$ para todo n , detalhes abaixo.

$$x_{n+1} = 2 - \frac{1}{x_n} \iff x_{n+1} - x_n = 2 - \frac{1}{x_n} - x_n \iff x_{n+1} - x_n = -\frac{1}{x_n}(x_n^2 - 2x_n + 1)$$

Desta forma, $1 \leq x_{n+1} \leq x_n \leq x_1$ para todo n . Assim sendo, (x_n) converge para um número $\bar{x} \geq 1$. Por fim, resolva a equação $\bar{x} = 2 - 1/\bar{x}$ para concluir $\bar{x} = 1$.

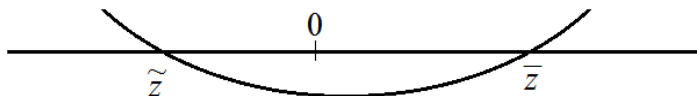
(6) \triangleright Inicialmente, observe que a igualdade $z = \sqrt{a+z}$ é equivalente à equação

$$z^2 - z - a = 0.$$

As raízes dessa equação são

$$\tilde{z} = \frac{1 - \sqrt{1+4a}}{2} < 0 \quad \text{e} \quad \bar{z} = \frac{1 + \sqrt{1+4a}}{2} > 0.$$

Considere o seguinte gráfico:



Lembre que $z_1 > 0$. Neste momento, o seu professor tem as seguintes conjecturas: se $z_1 = \bar{z}$, então $z_n = \bar{z}$ para todo n (isso é trivialmente verdade); se $z_1 < \bar{z}$, então (z_n) converge para \bar{z} de forma crescente; se $z_1 > \bar{z}$, então (z_n) converge para \bar{z} de forma decrescente. \triangleleft

A análise será dividida em três casos: (I) $z_1 = \bar{z}$, (II) $0 < z_1 < \bar{z}$ e (III) $z_1 > \bar{z}$.

Caso I Suponha que $z_n = \bar{z}$. Logo,

$$z_n = \sqrt{a + z_n} \Rightarrow z_n = z_{n+1}.$$

Desta forma, o Princípio da Indução estabelece que $z_n = \bar{z}$ para todo n . Isso implica que $\lim(z_n) = \bar{z}$.

Caso II Mostraremos que (z_n) é (i) limitada e (ii) crescente. Com relação à afirmativa (i), como $0 < z_1 < \bar{z}$, basta mostrar que

$$0 < z_n < \bar{z} \Rightarrow 0 < z_{n+1} < \bar{z}.$$

De fato,

$$0 < z_n < \bar{z} \Rightarrow 0 < a + z_n < a + \bar{z} \Rightarrow 0 < \sqrt{a + z_n} < \sqrt{a + \bar{z}} \Rightarrow 0 < z_{n+1} < \bar{z}.$$

Considere agora a afirmativa (ii). Utilizaremos o Princípio da Indução para estabelecer que $z_n \leq z_{n+1}$. Para mostrar que $z_1 \leq z_2$, é suficiente mostrar que $[z_1 > z_2 \Rightarrow z_1 > \bar{z}]$. Observe que

$$z_1 > z_2 \Rightarrow z_1 > \sqrt{a + z_1} \Rightarrow z_1^2 > a + z_1 \Rightarrow z_1^2 - z_1 - a > 0.$$

Como $z_1 > 0$, concluímos que $z_1 > \bar{z}$ (\triangleright ver gráfico antes da resolução \triangleleft). Adicionalmente,

$$z_n \leq z_{n+1} \Rightarrow a + z_n \leq a + z_{n+1} \Rightarrow \sqrt{a + z_n} \leq \sqrt{a + z_{n+1}} \Rightarrow z_{n+1} \leq z_{n+2}.$$

Como (z_n) é limitada e crescente, ela possui um limite. Agora, observe que

$$\begin{aligned} z_{n+1} &= \sqrt{a + z_n} \Rightarrow z_{n+1}^2 = a + z_n \Rightarrow \\ [\lim(z_n)]^2 &= a + \lim(z_n) \Rightarrow [\lim(z_n)]^2 - \lim(z_n) - a = 0. \end{aligned}$$

Assim sendo, $\lim(z_n) = \bar{z}$.

Caso III Esboço Modifique o raciocínio utilizado no caso anterior para mostrar que (z_n) é limitada e decrescente e que ela converge para \bar{z} .

\triangleright Inicialmente, mostre que a sequência é decrescente. Com relação a ela ser limitada, o fato de ela ser decrescente implica que z_1 é uma cota superior para (z_n) . Basta então mostrar que $[z_n > \bar{z} \Rightarrow z_{n+1} > \bar{z}]$. \triangleleft

(7) **Esboço** Mostre que $0 < a \leq x_n$ e $x_n \leq x_{n+1}$ para todo n . Logo, se (x_n) converge, então $\lim(x_n) > 0$. Suponha que (x_n) converge e denote o seu limite por x . Observe que $x^{-1} > 0$. Adicionalmente, $x = x + x^{-1}$, de onde se conclui que $x^{-1} = 0$ (contradição).

(9) Se $u \in S$, então utilize a sequência constante dada por $x_n = u$. Suponha agora que $u \notin S$. Desta forma, para todo $n \in \mathbb{N}$ existe um número $y_n \in S$ tal que

$$u - \frac{1}{n} \leq y_n \leq u. \quad (8)$$

Defina (x_n) recursivamente de forma que $x_1 = y_1$ e $x_n = \max\{y_n, x_{n-1}\}$. Como $x_n \geq x_{n-1}$, (x_n) é crescente. Seja $P(n)$ a afirmativa

$$u - \frac{1}{n} \leq x_n \leq u.$$

Combine o fato de que $x_1 = y_1$ e (8) para concluir que $P(1)$ é verdadeira. Suponha que $P(n)$ seja verdade. Se $x_{n+1} = y_{n+1}$, então (8) implica que $P(n+1)$ se verifica. Suponha agora que $x_{n+1} = x_n$. Observe que $P(n)$ implica que $x_{n+1} \leq u$. Ademais, $x_{n+1} \geq y_{n+1} \geq u - 1/(n+1)$. Desta forma, $P(n+1)$ também se verifica no caso em análise. Combine $P(n)$ com o Teorema do Sanduíche para concluir que $\lim(x_n) = u$. Obs.: não se pode afirmar que (y_n) é crescente.

3.4

(5) **Esboço** Suponha que $\lim(z_n) = z$. Logo, $\lim(z_{2n-1}) = \lim(z_{2n}) = z$. Assim sendo, $\lim(x_n) = \lim(y_n) = z$. Assuma agora que $\lim(x_n) = \lim(y_n) = z$. Seja ε um número positivo qualquer. Logo, existe um natural K'_x tal $|x_n - z| < \varepsilon$ para todo $n \geq K'_x$. Por sua vez, seja K_x um natural ímpar tal que

$$\frac{K_x + 1}{2} \geq K'_x.$$

Vale ressaltar que $(K_x + 1)/2$ é um número natural. Assim sendo,

$$\left[n \geq \frac{K_x + 1}{2} \Rightarrow |x_n - z| < \varepsilon \right] \Rightarrow [2n - 1 \geq K_x \Rightarrow |z_{2n-1} - z| < \varepsilon].$$

Assim sendo, se $m \geq K_x$ é um natural ímpar, então $|z_m - z| < \varepsilon$. De forma similar, existe um natural par K_y tal que

$$2n \geq K_y \Rightarrow |z_{2n} - z| < \varepsilon.$$

Logo, se $m \geq K_y$ é um natural par, então $|z_m - z| < \varepsilon$. Agora, defina $K = \max\{K_x, K_y\}$. Assim sendo, $|z_m - z| < \varepsilon$ para todo $m \geq K$.

3.5

(2a) Inicialmente, observe que se $m > n$, então

$$x_m - x_n = \frac{m+1}{m} - \frac{n+1}{n} = \frac{n-m}{mn} \Rightarrow |x_m - x_n| = \frac{m-n}{mn}.$$

Dado ε , seja $H(\varepsilon)$ qualquer número natural maior que ε^{-1} . Desta forma, para $m > n \geq H(\varepsilon)$,

$$H(\varepsilon) > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow \frac{m}{mn} < \varepsilon \Rightarrow \frac{m-n}{mn} < \varepsilon.$$

(2b) Os exercícios 14 e 16 da Seção 1.2 implicam que para todo $n \geq 5$,

$$n^2 < n! . \tag{9}$$

Para referência futura, mostraremos que, para todo m e n tal que $m > n$,

$$\sum_{j=n+1}^m \frac{1}{j^2} \leq \frac{1}{n}. \tag{10}$$

De fato,

$$\frac{1}{j^2} \leq \frac{1}{(j-1)j} = \frac{1}{j-1} - \frac{1}{j}.$$

Desta forma,

$$\begin{aligned} \sum_{j=n+1}^m \frac{1}{j^2} &\leq \sum_{j=n+1}^m \frac{1}{(j-1)j} = \sum_{j=n+1}^m \left[\frac{1}{j-1} - \frac{1}{j} \right] = \\ &= \sum_{j=n+1}^m \frac{1}{j-1} - \sum_{j=n+1}^m \frac{1}{j} = \sum_{j=n}^{m-1} \frac{1}{j} - \sum_{j=n+1}^m \frac{1}{j} = \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \leq \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Agora, observe que se $m > n$, então

$$x_m - x_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \dots + \frac{1}{m!}.$$

Combine a última igualdade com (9) para concluir que se $m > n \geq 5$, então

$$|x_m - x_n| \leq \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots + \frac{1}{m^2} = \sum_{j=n+1}^m \frac{1}{j^2}.$$

Assim sendo, podemos utilizar (9) para afirmar que se $m > n \geq 5$, então

$$|x_m - x_n| \leq \frac{1}{n}. \quad (11)$$

Estamos agora aptos a estabelecer que (x_n) é uma sequência de Cauchy. Dado $\varepsilon > 0$, seja $H(\varepsilon)$ qualquer natural maior que $\max\{\varepsilon^{-1}, 5\}$. Logo,

$$n \geq H(\varepsilon) \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Assim sendo, se $m > n \geq H(\varepsilon)$, $|x_m - x_n| < \varepsilon$.

(12) **Esboço** Utilize indução para mostrar que $x_n > 0$ para todo n . Agora, observe que

$$|x_{n+2} - x_{n+1}| = \left| \frac{1}{2 + x_{n+1}} - \frac{1}{2 + x_n} \right| = \frac{|x_{n+1} - x_n|}{(2 + x_{n+1})(2 + x_n)} \leq \frac{1}{4} |x_{n+1} - x_n|.$$

Logo, (x_n) é uma contração.