ANÁLISE MATEMÁTICA PARA ECONOMISTAS: NOTAS DE AULA

Este documento consiste em notas de aula para o Capítulo 3 de Bartle & Sherbert (*Introduction to Real Analysis*. 3ª edição. Nova Iorque: John Wiley & Sons, 2000).

Elaboração: Alexandre B. Cunha

3 Sequências e Séries

3.1 Sequências e Seus Limites

Definição 3.1.1 Uma **sequência de números reais** (ou uma **sequência em** $\mathbb{R}$) é uma função definida em $\mathbb{N}$ e com imagem contida em $\mathbb{R}$.

Ou seja, uma sequência em $\mathbb{R}$ associa a cada número natural um número real. Dada uma sequência $X : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, o valor $X(n)$ será denotado por x_n. Essa sequência será frequentemente denotada, no livro-texto, por X, (x_n) ou $(x_n : n \in \mathbb{N})$; outros livros: $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Vale ressaltar que, ao contrário do que ocorre em um conjunto, é preciso listar os termos na ordem original e não omitir as repetições. Exemplos: $\{(-1)^n : n \in \mathbb{N}\} = \{-1, 1\} = \{1, -1\}$; $((-1)^n : n \in \mathbb{N}) = (-1, 1, -1, 1, \cdots)$.

Uma sequência pode ser definida através da especificação de uma fórmula para x_n. Exemplo: $x_n = 2n$. Ela também pode ser definida indutivamente (recursivamente). Exemplos: $x_1 = 1$, $x_{n+1} = x_n + 3$; $x_1 = 0$, $x_2 = 3$, $x_{n+2} = x_{n+1} - x_n$.

Exemplos 3.1.2 **(a)** Se $b \in \mathbb{R}$, então $B = (b, b, b, \cdots)$ é a **sequência constante** b.
(b) Se $b \in \mathbb{R}$, então $B = (b^n)$ é a sequência $(b, b^2, b^3, \cdots, b^n, \cdots)$.
(c) A sequência X que lista todos os números pares em ordem crescente pode ser definida pela fórmula $x_n = 2n$ ou indutivamente de acordo com $x_1 = 2$, $x_{n+1} = x_n + 2$.
(d) A conhecida **sequência de Fibonacci** F é definida indutivamente de acordo com $f_1 = 1$, $f_2 = 1$, $f_{n+1} = f_{n-1} + f_n$. $\square$

O Limite de uma Sequência

Há vários conceitos de *limite* em Análise. O mais básico deles é o de limite de uma sequência.

Definição 3.1.3 Uma sequência $X = (x_n)$ em $\mathbb{R}$ **converge** para $x \in \mathbb{R}$, ou x é dito ser o **limite** de (x_n), se para todo $\varepsilon > 0$ existir um número natural $K(\varepsilon)$ tal que $|x_n - x| < \varepsilon$ para todo $n \geq K(\varepsilon)$. Se uma sequência tem limite, então ela dita ser **convergente**; caso contrário, ela é dita ser **divergente**.

Comentário Utiliza-se a notação $K(\varepsilon)$ para enfatizar que K depende de ε. Frequentemente o ε é omitido.

As notações $\lim X = x$, $\lim(x_n) = x$ e $x_n \to x$ serão utilizadas para expressar o fato de que o número real x é o limite da sequência X. Outros livros: $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ e $\lim x_n = x$.

- Troca de ordem na exposição; anteciparemos um comentário (*remark*), alguns exemplos e o jogo $K(\varepsilon)$.

Comentário A Definição 3.1.3 nada diz sobre como identificar o valor do limite. Usualmente é preciso fazer uma conjectura sobre o valor do limite e seguida verificar se a definição é satisfeita.

Nos exemplos abaixo, adotaremos a seguinte abordagem: inicialmente, utilizaremos a desigualdade $|x_n - x| < \varepsilon$ para obter um "candidato a $K(\varepsilon)$"; feito isso, verificaremos se a nossa conjectura está correta.

Exemplos 3.1.6 **(a)** $\lim(1/n) = 0$
Rascunho: queremos $|1/n - 0| < \varepsilon$.

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon \iff \frac{1}{n} < \varepsilon \iff n > \frac{1}{\varepsilon}$$

Candidato: $K(\varepsilon)$ é igual ao menor (ou *qualquer* ao invés de *menor*) natural maior que $1/\varepsilon$. **Resposta**: Seja $K(\varepsilon)$ o menor natural maior que $1/\varepsilon$. Observe que

$$n \geq K(\varepsilon) \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon.$$

(b) $\lim\left(\frac{1}{n^2+1}\right) = 0$
Rascunho

$$\left|\frac{1}{n^2+1} - 0\right| < \varepsilon \iff \frac{1}{n^2+1} < \varepsilon \iff n^2 + 1 > \frac{1}{\varepsilon} \Leftarrow n^2 > \frac{1}{\varepsilon} \iff n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$$

Resposta: Seja $K(\varepsilon)$ o menor natural maior que $1/\sqrt{\varepsilon}$. Observe que

$$n \geq K(\varepsilon) \Rightarrow n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \Rightarrow n^2 > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow n^2+1 > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{1}{n^2+1} < \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{1}{n^2+1} - 0\right| < \varepsilon.$$

Vale ressaltar que os autores utilizam o fato de que $n^2 \geq n$ para utilizar $1/\varepsilon$ ao invés de $1/\sqrt{\varepsilon}$.
(c) $\lim\left(\frac{3n+2}{n+1}\right) = 3$
Inicialmente, observe que

$$\left|\frac{3n+2}{n+1} - 3\right| = \frac{1}{n+1}.$$

Rascunho

$$\frac{1}{n+1} < \varepsilon \iff n+1 > \frac{1}{\varepsilon} \Leftarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$$

Resposta: Seja $K(\varepsilon)$ o menor natural maior que $1/\varepsilon$. Observe que

$$n \geq K(\varepsilon) \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow n+1 > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{1}{n+1} < \varepsilon.$$

(d) Se $0 < b < 1$, então $\lim(b^n) = 0$.
Rascunho (Lembre que $\ln b < 0$.)

$$b^n < \varepsilon \iff \ln(b^n) < \ln\varepsilon \iff n\ln b < \ln\varepsilon \iff n > \frac{\ln\varepsilon}{\ln b}$$

Resposta: Seja $K(\varepsilon)$ o menor natural maior que $\ln\varepsilon/\ln b$. Desta forma,

$$n \geq K(\varepsilon) \Rightarrow n > \frac{\ln\varepsilon}{\ln b} \Rightarrow n\ln b < \ln\varepsilon \Rightarrow \ln(b^n) < \ln\varepsilon \Rightarrow b^n < \varepsilon \Rightarrow |b^n - 0| < \varepsilon. \ \square$$

Exemplos adicionais (sequências divergentes) Para estabelecer que uma sequência é divergente, é preciso mostrar que, para todo $x \in \mathbb{R}$, existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $K \in \mathbb{N}$, $|x_n - x| \geq \varepsilon$ para algum $n \geq K$.
(1) $x_n = n^2$

Seja x um número real. Suponha que $x \leq 0$. [Ilustrar na linha reta] Observe que $n^2 - x \geq 1 - x \geq 1$. Logo, $|n^2 - x| \geq 1$ para todo n. Desta forma, (x_n) não pode convergir para x. Agora assuma que $x > 0$. [Ilustrar na linha reta]. Observe que

$$n \geq \sqrt{\varepsilon + x} \Rightarrow n^2 \geq \varepsilon + x \Rightarrow n^2 - x \geq \varepsilon > 0 \Rightarrow |n^2 - x| \geq \varepsilon.$$

Assim sendo, $|n^2 - x| \geq \varepsilon$ para todo $n \geq \sqrt{\varepsilon + x}$. Mais uma vez, (x_n) não pode convergir para x. Comentário: razão para "quebrar" em dois casos: $\varepsilon + x$ pode ser negativo.

(2) $y_n = (-1)^n$
Mostraremos mais à frente (Teorema 3.1.4) que uma sequência não pode ter dois (ou mais) limites.
[Desenhar a linha reta e discutir a abordagem. Ponto central: y “próximo” de y_{2n} fica “longe” de y_{2n+1}].

Seja y um número real qualquer. Faça $\varepsilon = 1/2$. Se $|y_{2n} - y| \geq 1/2$ para algum n, então a mesma desigualdade se verifica para todo n (razão). Suponha agora que $|y_{2n} - y| < 1/2$ para todo n. Assim sendo,

$$\begin{aligned} |1-y| &< \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} < 1-y < \frac{1}{2} \Rightarrow 1-y < \frac{1}{2} \Rightarrow y-1 > -\frac{1}{2} \Rightarrow \\ y+1 &> \frac{3}{2} \geq \frac{1}{2} \Rightarrow y - y_{2n+1} \geq \frac{1}{2} \Rightarrow |y_{2n+1} - y| \geq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Logo, Y é divergente. □

Comentário: o Jogo $K(\varepsilon)$
(1) O jogador A afirma que x é o limite de (x_n).
(2) O jogador B desafia A enunciando um valor para ε.
(3) A precisa achar $K(\varepsilon)$ com a propriedade especificada na Definição 3.1.3.
Se A sempre conseguir achar $K(\varepsilon)$, então ele vence o jogo. Para que B vença o jogo, ele precisa enunciar um ε tal que o jogador A não consiga achar um $K(\varepsilon)$ adequado.

Teorema 3.1.4 (Unicidade do Limite) Uma sequência em $\mathbb{R}$ pode ter no máximo um limite.

Prova. Suponha que ambos x' e x'' sejam limites de uma sequência (x_n). Desta forma, para cada $\varepsilon > 0$ existem números naturais K' e K'' tais que $|x_n - x'| < \varepsilon/2$ para $n \geq K'$ e $|x_n - x''| < \varepsilon/2$ para $n \geq K''$. Defina $K = \max\{K', K''\}$. Podemos então aplicar a Desigualdade Triangular para concluir que, para $n \geq K$,

$$|x' - x''| = |x' - x_n + x_n - x''| \leq |x' - x_n| + |x_n - x''| \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Como $\varepsilon > 0$ é um número positivo arbitrário, $|x' - x''| = 0$. Assim sendo, $x' = x''$. □

Capítulo 2: o conjunto $V_\varepsilon(x) = \{u \in \mathbb{R} : |u - x| < \varepsilon\}$ é uma vizinhança-ε de x.

Teorema 3.1.5 Sejam X uma sequência em $\mathbb{R}$ e x um número real. As afirmativas que se seguem são equivalentes.
(a) X converge para x.
(b) Para todo $\varepsilon > 0$, existe $K(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - x| < \varepsilon$ para todo $n \geq K(\varepsilon)$.
(c) Para todo $\varepsilon > 0$, existe $K(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon$ para todo $n \geq K(\varepsilon)$.
(d) Para toda vizinhança-ε de x, existe $K(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in V_\varepsilon(x)$ para todo $n \geq K(\varepsilon)$.

Prova (esboço). [(a) $\iff$ (b)] Definição 3.1.3.
[(b) $\iff$ (c)] $|x_n - x| < \varepsilon \iff -\varepsilon < x_n - x < \varepsilon \iff x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon$
[(d) $\iff$ (b)] $x_n \in V_\varepsilon(x) \iff |x_n - x| < \varepsilon$ □

Caudas de Sequências

A convergência (ou divergência) de uma sequência X depende somente dos seus "termos finais". Ou seja, se cortarmos ou modificarmos os $m \in \mathbb{N}$ termos iniciais de X, nenhuma conclusão referente a sua convergência (ou divergência) será afetada.

Definição 3.1.8 Se X é uma sequência em $\mathbb{R}$ e m é um número natural, então a ***cauda-m*** de X é a sequência

$$X_m = (x_{m+n} : n \in \mathbb{N}) = (x_{m+1}, x_{m+2}, \cdots).$$

Por exemplo, se $X = (2, 4, 6, 8, 10, \cdots, 2n, \cdots)$, então a cauda-3 de X é a sequência $X_3 = (8, 10, 12, \cdots, 2n + 6, \cdots)$.

Teorema 3.1.9 Sejam X uma sequência em $\mathbb{R}$ e m um número natural. A cauda-m de X converge se e somente X converge. Nesse caso, $\lim X_m = \lim X$.

Exemplos Adicionais

Ao estudarmos a convergência de uma sequência, muitas vezes é conveniente simplificar a expressão $|x_n - x|$ (inclusive nós já procedemos dessa forma). O próximo teorema formaliza uma dessas possíveis simplificações.

Teorema 3.1.10 Sejam (x_n) uma sequência em $\mathbb{R}$ e x um número real. Se (a_n) é uma sequência de reais positivos tal que $\lim(a_n) = 0$ e se para alguma constante $C > 0$ e algum $m \in \mathbb{N}$ a condição $|x_n - x| \leq Ca_n$ for respeitada para todo $n \geq m$, então $\lim(x_n) = x$.

Prova. Fixe $\varepsilon > 0$. Como $\lim(a_n) = 0$, existe $K(\varepsilon/C)$ tal

$$n \geq K(\varepsilon/C) \Rightarrow a_n = |a_n - 0| < \varepsilon/C.$$

Logo, para $n \geq \max\{K(\varepsilon/C), m\}$, temos

$$|x_n - x| \leq Ca_n < C\frac{\varepsilon}{C} = \varepsilon. \ \square$$

Observe que C não pode depender de n.

Exemplos 3.1.11 **(a)** Se $a > 0$, então $\lim\left(\frac{1}{1+na}\right) = 0$.
Observe que
$$a > 0 \Rightarrow 0 < na < 1 + na \Rightarrow \frac{1}{1+na} < \frac{1}{na}.$$
Desta forma,
$$\left|\frac{1}{1+na} - 0\right| = \frac{1}{1+na} \leq \left(\frac{1}{a}\right)\frac{1}{n}$$
para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $\lim(1/n) = 0$, é possível aplicar (3.1.10); para tanto, faça $C = 1/a$ e $m = 1$. Isso nos permite concluir que $\lim\left(\frac{1}{1+na}\right) = 0$.
(b) e **(c)** Ler. □

3.2 Teoremas sobre Limites

Nesta seção nós obteremos resultados que nos permitirão avaliar os limites de algumas sequências.

Definição 3.2.1 Uma sequência X em $\mathbb{R}$ é **limitada** se existir $M \in \mathbb{R}$ tal que $|x_n| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

- As palavras *limitada* e *convergente* não possuem o mesmo significado.
  - *Limitada* e *bounded* vs. *convergente* e *convergent*.

Teorema 3.2.2 Se uma sequência X em $\mathbb{R}$ é convergente, então X é limitada.

Prova. Seja X uma sequência convergente e x o seu limite. Observe que existe $K \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq K$,
$$|x_n - x| < 1 \Rightarrow |x_n - x| + |x| < 1 + |x| \Rightarrow |x_n| < 1 + |x|.$$
Defina M de forma que
$$M = \max\{|x_1|, |x_2|, \cdots, |x_{K-1}|, 1 + |x|\}.$$
Tendo em vista que $|x_n| \leq M$ para todo $n \in N$, X é limitada. □

Dada duas sequências X e Z, define-se a soma delas por $X + Z = (x_n + z_n)$. A diferença $X - Z$, a multiplicação $X \cdot Z$ e a divisão X/Z são definidas de forma similar; evidentemente, no caso da última operação é necessário que $z_n \neq 0$ para todo n.

Comentário (Troca de Ordem de Operações) Sejam X e Z duas sequências convergentes e x e z os seus respectivos limites. Será que $\lim(x_n+z_n) = \lim(x_n)+\lim(z_n)$? Observe a troca da ordem das operações "+" e "lim".

Teorema 3.2.3 (a) Sejam X e Y sequências de números reais que convergem, respectivamente, para x e y e c um número real. As sequências $X+Y$, $X-Y$, $X \cdot Y$ e cX convergem, respectivamente, para $x+y$, $x-y$, xy e cx.
(b) Se X converge para x e Z é uma sequência de reais, todos diferentes de 0, que converge para $z \neq 0$, então $\lim(x_n/z_n) = x/z$.

Prova das partes referentes a soma e a multiplicação. Considere inicialmente a soma. Como X e Y são convergentes, existem números naturais $K_x(\varepsilon/2)$ e $K_y(\varepsilon/2)$ tais que, para todo $n \geq \max\{K_x(\varepsilon/2), K_y(\varepsilon/2)\}$, $|x_n - x| < \varepsilon/2$ e $|y_n - y| < \varepsilon/2$. Defina $K(\varepsilon) = \max\{K_x(\varepsilon/2), K_y(\varepsilon/2)\}$, some as duas últimas desigualdade membro a membro e aplique a desigualdade triangular para concluir que $|(x_n + y_n) - (x+y)| < \varepsilon$ para todo $n \geq K(\varepsilon)$. Logo, $X+Y$ converge para $x+y$.

No tocante à multiplicação, observe que

$$\begin{aligned}
|x_n y_n - xy| = |(x_n y_n - x_n y) + (x_n y - xy)| \leq \\
|x_n y_n - x_n y| + |x_n y - xy| = |x_n||y_n - y| + |x_n - x||y| \Rightarrow \\
|x_n y_n - xy| \leq |x_n||y_n - y| + |x_n - x||y|. \qquad (3.1)
\end{aligned}$$

Como X é convergente, ela também é limitada. Logo, existe $M_1 \in \mathbb{R}$ tal que $|x_n| \leq M_1$ para todo n. Defina $M = \max\{M_1, |y|\}$. Assim sendo, (3.1) implica que

$$|x_n y_n - xy| \leq M|y_n - y| + M|x_n - x|.$$

Utilize o fato de que X e Y são convergentes para concluir que existe um número natural $K(\varepsilon)$ com a propriedade de que, para todo $n \geq K(\varepsilon)$,

$$|x_n y_n - xy| < M\frac{\varepsilon}{2M} + M\frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon. \ \Box$$

Outros itens Para a diferença, defina $Z = -Y$ e aplique o resultado para a soma $X+Z$. Para cX, defina $y_n = c$ para todo n e aplique o resultado para o produto $X \cdot Y$. Para a divisão, defina $y_n = 1/z_n$, mostre que $\lim(y_n) = 1/z$ e aplique o resultado para produto $X \cdot Y$.

É possível utilizar o Princípio da Indução para generalizar último teorema para operações com $m \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ sequências.

Teorema 3.2.4 Seja X uma sequência convergente. Se $x_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $\lim(x_n) \geq 0$.

Comentário Enunciado ligeiramente distinto do livro.

Prova. A demonstração será feita por contraposição. Denote o limite de (x_n) por x. Suponha que $x < 0$ e faça $\varepsilon = -x$ na definição de limite. Logo, para m suficientemente grande,

$$|x_m - x| < -x \Rightarrow x_m - x < -x \Rightarrow x_m < 0.$$

Contudo, a última desigualdade contradiz a hipótese de que $x_n \geq 0$ para todo n. □

Teorema 3.2.5 Sejam X e Y duas sequências convergentes. Se $x_n \leq y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $\lim(x_n) \leq \lim(y_n)$.

Prova (esboço). Defina $Z = Y - X$ e aplique os dois últimos teoremas. □

- Não é possível substituir "$\leq$" por "$<$". Exemplo: $x_n = 1/(n+1)$ e $y_n = 1/n$.

Teorema 3.2.6 Seja X uma sequência convergente. Se $a \leq x_n \leq b$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $a \leq \lim(x_n) \leq b$.

Teorema 3.2.7 (Sanduíche) Sejam X, Y e Z três sequências em $\mathbb{R}$ com a propriedade de que $\lim(x_n) = \lim(z_n)$. Se $x_n \leq y_n \leq z_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então Y converge para o mesmo limite que as outras duas sequências.

Prova. Denote $\lim(x_n)$ e $\lim(z_n)$ por w. Fixe $\varepsilon > 0$. Como X e Z convergem, existe $K(\varepsilon)$ tal que

$$|x_n - w| < \varepsilon \ \ \& \ \ |z_n - w| < \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon < x_n - w \ \ \& \ \ z_n - w < \varepsilon$$

para todo $n \geq K(\varepsilon)$. Adicionalmente, $x_n - w \leq y_n - w \leq z_n - w$ para todo n. Assim sendo,

$$-\varepsilon < y_n - w < \varepsilon \Rightarrow |y_n - w| < \varepsilon$$

para todo $n \geq K(\varepsilon)$. □

Exemplos 3.2.8 **(a)** A sequência (n) é divergente.
De fato, se essa sequência fosse convergente, então ela seria limitada. Contudo, isso contradiz o fato de que o conjunto dos naturais é ilimitado.
(b) A sequência $((-1)^n)$ é divergente; detalhes no livro; já discutida neste documento.
(c) $\lim\left(\frac{2n+1}{n}\right) = 2$

$$\frac{2n+1}{n} = 2 + \frac{1}{n}$$

Aplicar teorema 3.2.3(a).
(d) $\lim\left(\frac{2n+1}{n+5}\right) = 2$

$$\frac{2n+1}{n+5} = \frac{2 + 1/n}{1 + 5/n}$$

Aplicar teorema 3.2.3(b); $x_n = 2 + 1/n$ e $z_n = 1 + 5/n$.
(f) $\lim\left(\frac{\sin n}{n}\right)$
$$-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n}$$
Aplicar Teorema do Sanduíche.
(g) Se $p(t)$ é um polinômio e $\lim(x_n) = x$, então $\lim(p(x_n)) = p(x)$; tratar cada termo do polinômio como uma sequência. □

Teorema 3.2.9 Seja X uma sequência. Se $\lim(x_n) = x$, então $\lim(|x_n|) = |x|$.

Prova (esboço). Utilize o fato de que $||x_n| - |x|| \leq |x_n - x|$. □

Não é correto dizer que a convergência de $(|x_n|)$ implica a convergência de (x_n). Exemplo: $x_n = (-1)^n$.

Teorema 3.2.10 Seja X uma sequência de números reais não negativos. Se $\lim(x_n) = x$, então $\lim(\sqrt{x_n}) = \sqrt{x}$.

Teorema 3.2.11 Seja X uma sequência de números reais positivos tal que $\lim\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right) = L$. Se $L < 1$, então $\lim(x_n) = 0$.

3.3 Sequências Monótonas

Definição 3.3.1 Uma sequência X de números reais é dita ser **crescente** se
$$x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n \leq x_{n+1} \leq \cdots ,$$
decrescente se
$$x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n \geq x_{n+1} \geq \cdots$$
e **monótona** se ela for crescente ou decrescente.

Teorema 3.3.2 (Convergência Monótona) Uma sequência monótona é convergente se e somente se ela é limitada. Adicionalmente,
(a) Se X é crescente e limitada, então $\lim(x_n) = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.
(b) Se Y é decrescente e limitada, então $\lim(y_n) = \inf\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Prova. A nossa prova será mais longa do que a do livro. Considere as sete afirmativas enunciadas abaixo, onde Z é uma sequência genérica.
P: Z é monótona.
P_1: Z é crescente.
P_2: Z é decrescente.

Q: Z é convergente.
Q_1: $\lim(z_n) = \sup\{z_n : n \in \mathbb{N}\}$.
Q_2: $\lim(z_n) = \inf\{z_n : n \in \mathbb{N}\}$.
R: Z é limitada.
Dito isto, nós precisamos provar que: (i) $[P \ \ \& \ \ Q \Rightarrow R]$; (ii) $[P \ \ \& \ \ R \Rightarrow Q]$; (iii) $[P_1 \ \ \& \ \ R \Rightarrow Q_1]$; (iv) $[P_2 \ \ \& \ \ R \Rightarrow Q_2]$. Começaremos por (i). Contudo, essa afirmativa é uma consequência imediata do Teorema 3.2.2. Com relação à implicação (ii), é suficiente estabelecer que (iii) e (iv) são verdadeiras.

Considere a afirmativa (iii). Assuma que P_1 e R são verdadeiras. Logo, existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $z_n \leq M$ para todo n; consequentemente, o conjunto $\{z_n : n \in \mathbb{N}\}$ possui um supremo $\bar{z}$. Mostraremos que $\lim(z_n) = \bar{z}$. Seja ε um real positivo. Pela propriedades do supremo, sabemos que existe $K \in \mathbb{N}$ tal que $\bar{z} - \varepsilon < z_K$. Utilize o fato de que Z é crescente para concluir que

$$\bar{z} - \varepsilon < z_K \leq z_n, \forall n \geq K. \tag{3.2}$$

Adicionalmente, $z_n < \bar{z} + \varepsilon$ para todo n. Combine esse último fato com (3.2) para concluir que, para todo $n \geq K$,

$$\bar{z} - \varepsilon < z_n < \bar{z} + \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon < z_n - \bar{z} < \varepsilon \Rightarrow |z_n - \bar{z}| < \varepsilon.$$

Logo, $\lim(z_n) = \bar{z}$.

Para estabelecer a veracidade de (iv), defina $X = -Z$. Observe que X é crescente e limitada. Logo, (iii) implica que $\lim(x_n) = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Aplique o Teorema 3.2.3(a) para concluir que $\lim(z_n) = -\sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Assim sendo, resta mostrar que $\inf\{z_n : n \in \mathbb{N}\} = -\sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Observe que

$$x_m \leq \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \Rightarrow z_m = -x_m \geq -\sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Logo, $-\sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ é uma cota inferior para $\{z_n : n \in \mathbb{N}\}$. Agora, seja u um real tal $u > -\sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Logo, $-u < \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Desta forma, existe um natural k tal que

$$-u < x_k = -z_k \Rightarrow z_k < u.$$

Assim sendo, u não é uma cota inferior de Z. Concluímos então que $-\sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ é a maior cota inferior de Z. $\square$

Exemplos 3.3.3 **(a)** $y_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$
É possível utilizar o fato que $\lim(1/n) = 0$ e o Teorema 3.2.10 para concluir que $\lim(y_n) = 0$. Alternativamente, é possível utilizar o Teorema 3.3.2, pois $0 \leq y_n \leq 1$ e $y_n \geq y_{n+1}$

para todo n. Logo, é suficiente estabelecer que $\inf\{y_n : n \in N\} = 0$.
(b) Seja X a sequência definida por

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

Como $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{n+1}$, X é crescente. Desta forma, a questão de ela ser ou não convergente se resume ao fato de ela ser ou não limitada. Como $x_{50.000} \cong 11,4$ e $x_{100.000} \cong 12,1$, ela parece ser limitada; por exemplo, talvez 20 seja uma cota superior. A despeito disso, mostraremos que ela não é limitada (logo, ela é divergente). Observe que

$$\begin{gathered} x_{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n - 1} + \frac{1}{2^n} \Rightarrow \\ x_{2^n} = 1 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \\ \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right). \end{gathered} \tag{3.3}$$

Dito isto, cada um dos termos entre parênteses é maior ou igual que $1/2$; vale ressaltar que a soma no último par de parênteses à direita contém 2^{n-1} termos, pois $2^n - 2^{n-1} = 2^{n-1}$ e

$$\frac{1}{2^{n-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^n} > \frac{2^{n-1}}{2^n} = \frac{1}{2}.$$

Ademais, o lado direito da igualdade (3.3) contém n termos entre parênteses. Para chegar a essa conclusão, observe que $2 = 2^1$, $4 = 2^2$, $8 = 2^3$ e, evidentemente, $2^n = 2^n$. Dito isto, podemos concluir que

$$x_{2^n} \geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2},$$

sendo que fração $1/2$ aparece n vezes na expressão acima. Logo,

$$x_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2}.$$

A última desigualdade implica que X é ilimitada. $\square$

As sequências definidas indutivamente precisam ser tratadas de forma distinta. Em particular, caso se saiba que uma sequência desse tipo é convergente, então talvez o valor do seu limite possa ser obtido a partir da relação indutiva que define a sequência. Por exemplo, **suponha** que se estabeleceu que a sequência X definida por $x_{n+1} = 2 + 1/x_n$ e $x_1 = 2$ é convergente. Observe que $x_n > 0$ para todo n (é possível mostrar isso por indução). Isso também implica que $x_n \geq 2$ para todo n. Logo, $x \geq 2$, onde $x = \lim(x_n)$. Utilize o fato de que $\lim(x_{n+1}) = \lim(x_n)$ para concluir que

$$x = 2 + \frac{1}{x} \Rightarrow x^2 - 2x - 1 = 0.$$

Como x não pode ser negativo, $x = 1 + \sqrt{2}$. Vale ressaltar que X não é monótona.

Não se pode simplesmente assumir a convergência. A título de ilustração, considere a sequência Y dada por $y_{n+1} = 2y_n + 1$, $y_1 = 1$. Claramente, $y_n > 0$ para todo n. Suponha agora que Y converge para y. Desta forma, $y = 2y + 1$, o que implica que $y = -1$. Contudo, essa conclusão é inconsistente com o fato de que $y_n > 0$ para todo n. O problema é que Y é ilimitada (logo, ela é divergente).

Exemplos 3.3.4 (a) Seja Y a sequência definida por $y_1 = 1$ e $y_{n+1} = \frac{1}{4}(2y_n + 3)$. Mostraremos (esboço) que $\lim Y = 3/2$.
(i) $y_n < 2\ \forall n$
$y_1 = 1 < 2$

$$y_n < 2 \Rightarrow 2y_n < 4 \Rightarrow 2y_n + 3 < 7 \Rightarrow y_{n+1} = \frac{1}{4}(2y_n + 3) < \frac{7}{4} < 2$$

(ii) Y é crescente

$$1 = y_1 < y_2 = \frac{5}{4}$$

$$y_n < y_{n+1} \Rightarrow \frac{1}{4}(2y_n + 3) < \frac{1}{4}(2y_{n+1} + 3) \Rightarrow y_{n+1} < y_{n+2}$$

(iii) Y é limitada, pois $y_1 \leq y_n < 2$ para todo n.
A convergência de Y decorre de (ii) e (iii). Denote $\lim Y$ por y.

$$y = \frac{1}{4}(2y + 3) \Rightarrow 4y = 2y + 3 \Rightarrow y = \frac{3}{2}$$

(b) Seja Z a sequência definida por $z_1 = 1$ e $z_{n+1} = \sqrt{2z_n}$. Mostraremos (esboço) que $\lim Z = 2$.
$z_1 = 1 < 2 \quad z_2 = \sqrt{2} \cong 1,41 < 2 \quad z_3 = \sqrt{2z_2} \cong 1,68 \quad z_4 = \sqrt{2z_3} \cong 1,83$
$1 \leq z_1 \leq z_2 \leq z_3 \leq z_4 < 2$
Conjectura: $1 \leq z_n \leq z_{n+1} < 2,\ \forall n$
Aplique o Princípio da Indução.

$$1 \leq z_n \leq z_{n+1} < 2 \Rightarrow 2 \leq 2z_n \leq 2z_{n+1} < 4 \Rightarrow$$
$$\sqrt{2} \leq \sqrt{2z_n} \leq \sqrt{2z_{n+1}} < 2 \Rightarrow 1 \leq \sqrt{2} \leq z_{n+1} \leq z_{n+2} < 2$$

Seja z o limite de Z; $z \neq 0$ (razão?).

$$z = \sqrt{2z} \Rightarrow z^2 - 2z = 0 \Rightarrow z = 2 \quad \square$$

- Outros tópicos discutidos nesta seção: cálculo de raízes quadradas e o número de Euler.

3.4 Subsequências e o Teorema de Bolzano-Weirtrass

Informalmente, uma subsequência é uma sequência construída a partir dos termos de outra sequência; porém, exige-se que os termos comuns estejam ordenados da mesma forma. Por exemplo, se (x_n) é uma sequência, então (x_{2n}), (x_{3n}), (x_{10n}) e (x_{n^4}) são subsequências de (x_n); $(1/2, 1/4, 1/6, \cdots)$ é uma subsequência de $(1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/6, \cdots)$. Relevância? Uma subsequência pode ser utilizada para identificar propriedades da sequência original.

Definição 3.4.1 Sejam $X = (x_n)$ uma sequência de números reais e $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$ uma sequência estritamente crescente de números naturais. A sequência $X' = (x_{n_k})$ dada por $(x_{n_1}, x_{n_2}, \cdots, x_{n_k}, \cdots)$ é dita ser uma **subsequência** de X.

Teorema 3.4.2 Se uma sequência $X = (x_n)$ de números reais converges para x, então todo subsequência $X' = (x_{n_k})$ de X também converge para x.

Prova. O primeiro passo consiste em mostrar que $n_k \geq k$. Claramente, $n_1 \geq 1$. Agora, observe que

$$n_k \geq k \Rightarrow n_k + 1 \geq k + 1.$$

Como $n_{k+1} \geq n_k + 1$, $n_{k+1} \geq k + 1$.

Dito isto, utilize o fato que X converge para x para concluir que, dado $\varepsilon > 0$, existe $K(\varepsilon)$ tal que $|x_k - x| < \varepsilon$ para todo $k \geq K(\varepsilon)$. Tendo em vista que $n_k \geq k$, $|x_{n_k} - x| < \varepsilon$.□

Corolário 3.4.3 (Critérios de Divergência) Se a sequência $X = (x_n)$ em $\mathbb{R}$ satisfaz (i) ou (ii) abaixo, então X é divergente.
(i) X tem duas subsequências X' e X'' convergentes tais que $\lim X' \neq \lim X''$.
(ii) X é ilimitada.

Prova. A propriedade (i) é decorrente do último resultado, ao passo que (ii) é consequência do Teorema 3.2.2. □

Teorema 3.4.7 (Subsequência Monótona) Se $X = (x_n)$ é uma sequência em $\mathbb{R}$, então X tem uma subsequência monótona.

Prova. Um termo x_m de X é dito ser um **pico** se $x_m \geq x_n$ para todo $n \geq m$; em outras palavras, x_m é maior ou igual que todos os termos que o sucedem. Vale ressaltar que em uma sequência decrescente cada termo é um pico, ao passo que uma estritamente crescente é desprovida de picos.

Suponha que X tenha um número infinito de picos. Liste esses picos de forma que os seus subscritos estejam ordenados de forma crescente: $x_{m_1}, x_{m_2}, \cdots, x_{m_k}, \cdots$, sendo que $m_1 < m_2 < \cdots < m_k < \cdots$. Tendo em vista que cada um desses termos é um pico, então $x_{m_1} \geq x_{m_2} \geq \cdots \geq x_{m_k} \geq \cdots$. Assim sendo, (x_{m_k}) é uma subsequência decrescente de X.

Assuma agora que X tenha um número finito (possivelmente zero) de picos. Mais uma vez, liste-os de forma que os subscritos estejam crescentemente ordenados: $x_{m_1} \geq x_{m_2} \geq \cdots \geq x_{m_r}$. Seja s_1 primeiro índice maior que m_r; ou seja, $s_1 = m_r+1$ (observe que $m_r = 0$ se não houver picos). Como x_{s_1} não é um pico, existe um índice $s_2 > s_1$ tal que $x_{s_1} < x_{s_2}$. De forma similar, x_{s_2} não é um pico. Logo, existe um índice $s_3 > s_2$ tal que $x_{s_2} < x_{s_3}$. A aplicação repetida deste raciocínio nos permite construir uma subsequência (x_{s_k}) que satisfaz as desigualdades $x_{s_1} < x_{s_2} < \cdots < x_{s_k} < \cdots$. □

Teorema 3.4.8 (Bolzano-Weirtrass) Seja X uma sequência em $\mathbb{R}$. Se X é limitada, então X tem uma subsequência convergente.

Prova. Seja X uma sequência de números reais. De acordo com o Teorema da Subsequência Monótona, X tem uma subsequência monótona X'. Adicionalmente, o fato de que X é limitada implica que o mesmo é verdade para X'. Assim sendo, X' é limitada e monótona. Aplique o Teorema 3.3.2 para concluir que X' é convergente. □

Teorema 3.4.9 Seja X uma sequência limitada de números reais e x um número real tal que toda subsequência convergente de X converge para x. Então $\lim X = x$.

3.5 O Critério de Cauchy

O Critério de Cauchy permite que se estabeleça a convergência de uma sequência sem a necessidade de se conhecer o seu limite.

Definição 3.5.1 Uma sequência X de números reais é dita ser uma **sequência de Cauchy** se para todo $\varepsilon > 0$ existir um número natural $H(\varepsilon)$ tal que

$$n, m \geq H(\varepsilon) \Rightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon.$$

- Atenção: **para todo** n e m maiores que ou iguais a $H(\varepsilon)$.

O nosso objetivo nesta seção consiste em estabelecer que uma sequência em $\mathbb{R}$ é convergente se e somente se ela é de Cauchy.

Exemplos 3.5.2 **(a)** A sequência $(1/n)$ é de Cauchy.
Dado $\varepsilon > 0$, seja $H(\varepsilon)$ um natural maior $2/\varepsilon$. Desta forma,

$$n \geq H(\varepsilon) \Rightarrow \frac{1}{n} \leq \frac{1}{H(\varepsilon)} < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \left|\frac{1}{n}\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

O mesmo raciocínio estabelece que $[m \geq H(\varepsilon) \Rightarrow |-1/m| < \varepsilon/2]$. Assim sendo,

$$\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| \leq \left|\frac{1}{n}\right| + \left|-\frac{1}{m}\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

(b) A sequência $(1 + (-1)^n)$ não é de Cauchy.
Uma sequência não é de Cauchy se existe um $\varepsilon_0 > 0$ tal que para todo H existem n e m maiores que H tal que $|x_n - x_m| \geq \varepsilon_0$. Dito isto, seja n um índice par qualquer e $m = n + 1$. Logo, $x_n = 2$ e $x_m = 0$; assim sendo, $|x_n - x_m| = 2$. Para concluir, considere qualquer $\varepsilon_0 \leq 2$. $\square$

O nosso objetivo é mostrar que as sequências de Cauchy são justamente as sequências convergentes. Mostraremos inicialmente que uma sequência convergente é de Cauchy.

Lema 3.5.3 Se X é uma sequência convergente de números reais, então X é uma sequência de Cauchy.

Prova. Denote o limite de X por x. Dado $\varepsilon > 0$, existe um natural $K(\varepsilon/2)$ tal que $|x_n - x| < \varepsilon/2$ para todo $n \geq K(\varepsilon/2)$. Desta forma, se $n, m \geq K(\varepsilon/2)$, então

$$|x_n - x_m| = |(x_n - x) + (x - x_m)| \leq |x_n - x| + |x - x_m| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Logo, é suficiente fazer $H(\varepsilon) = K(\varepsilon/2)$ para concluir que X é de Cauchy. $\square$

Lema 3.5.4 Uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$ é limitada.

Prova. Seja X uma sequência de Cauchy. Logo, existe $H \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n, m \geq H$,

$$|x_n - x_m| < 1 \Rightarrow |x_n - x_H| < 1 \Rightarrow |x_n| \leq |x_n - x_H| + |x_H| < 1 + |x_H|.$$

Defina M de forma que

$$M = \max\{|x_1|, |x_2|, \cdots, |x_{H-1}|, |x_H| + 1\}.$$

Tendo em vista que $|x_n| \leq M$ para todo $n \in N$, X é limitada. $\square$

Teorema 3.5.5 (Critério de Cauchy para Convergência) Uma sequência de números reais é convergente se e somente se ela é uma sequência de Cauchy.

Prova. A parte "somente se" foi estabelecida no Lema 3.5.3. Com relação à parte "se", seja X uma sequência de Cauchy. O Lema 3.5.4 implica que X é limitada. Assim sendo, é possível aplicar o Teorema 3.4.8 (Bolzano-Weirtrass) para concluir que X possui uma subsequência $X' = (x_{n_k})$ que é convergente. Denote o limite dessa subsequência por x^*. Concluiremos a prova mostrando que $\lim X = x^*$.

Seja ε um real positivo. Como X é de Cauchy, existe um número natural $H(\varepsilon/2)$ tal que se $n, m \geq H(\varepsilon/2)$, então

$$|x_n - x_m| < \varepsilon/2. \tag{1}$$

Adicionalmente, como X' é convergente, existe um número $K'(\varepsilon) \geq H(\varepsilon/2)$ pertencente ao conjunto $\{n_1, n_2, \cdots\}$ tal que $|x_{K'(\varepsilon)} - x^*| < \varepsilon/2$. Como $K'(\varepsilon) \geq H(\varepsilon/2)$, é possível fazer $m = K'(\varepsilon)$ em (1) para concluir que $|x_n - x_{K'(\varepsilon)}| < \varepsilon/2$. Agora, combine as duas últimas desigualdades concluir que

$$|x_n - x^*| \leq |x_n - x_{K(\varepsilon)}| + |x_{K(\varepsilon)} - x^*| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

para todo $n \geq H(\varepsilon/2)$. Faça $K(\varepsilon) = H(\varepsilon/2)$ para concluir que X converge para x^*. $\square$

Exemplos 3.5.6 (a) Seja $X = (x_n)$ a sequência definida por $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ e

$$x_n = \frac{1}{2}(x_{n-2} + x_{n-1}) \tag{3.4}$$

É possível utilizar uma planilha eletrônica para concluir que ela não é monótona; adicionalmente, ela não aparenta ser monótona mesmo para valores de n próximos de 50. Contudo, $1 \leq x_n \leq 2$ para todo n. Segue-se um esboço da prova.
Seja $P(n)$ a afirmativa $[1 \leq x_n \leq 2 \;\;\&\;\; 1 \leq x_{n+1} \leq 2]$; logo, $P(n+1)$ é a afirmativa $[1 \leq x_{n+1} \leq 2 \;\;\&\;\; 1 \leq x_{n+2} \leq 2]$. Observe que existe uma sutileza na afirmativa $[P(n) \Rightarrow P(n+1)]$.

$$\begin{aligned} 1 &= x_1 \leq 2 \\ 1 &\leq x_2 = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 &\leq x_n \leq 2 \;\;\&\;\; 1 \leq x_{n+1} \leq 2 \Rightarrow 0,5 \leq 0,5x_n \leq 1 \;\;\&\;\; 0,5 \leq 0,5x_{n+1} \leq 1 \Rightarrow \\ 1 &= 0,5 + 0,5 \leq 0,5x_n + 0,5x_{n+1} = x_{n+2} \leq 1 + 1 = 2 \Rightarrow 1 \leq x_{n+2} \leq 2 \end{aligned}$$

Adicionalmente,

$$|x_n - x_{n+1}| = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \tag{3.5}$$

para todo n. Esboço: mostraremos que

$$x_n - x_{n+1} = (-1)^n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \tag{3.6}$$

$Q(n)$ é a seguinte afirmativa:

$$x_n - x_{n+1} = (-1)^n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \ \& \ x_{n+1} - x_{n+2} = (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= 1 - 2 = -1 = (-1)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^0 \\ x_2 - x_3 &= 2 - 1,5 = \frac{1}{2} = (-1)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{n+2} - x_{n+3} &= \frac{1}{2}(x_n + x_{n+1}) - \frac{1}{2}(x_{n+1} + x_{n+2}) = \frac{1}{2}x_n - \frac{1}{2}x_{n+2} \Rightarrow \\ x_{n+2} - x_{n+3} &= \frac{1}{2}(x_n - x_{n+1}) + \frac{1}{2}(x_{n+1} - x_{n+2}) \end{aligned}$$

Assuma que $Q(n)$ é verdadeira.

$$\begin{aligned} x_{n+2} - x_{n+3} &= \frac{1}{2}(-1)^n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{1}{2}(-1)^{n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^n \Rightarrow \\ x_{n+2} - x_{n+3} &= (-1)^n \left(\frac{1}{2}\right)^n + (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \Rightarrow \\ x_{n+2} - x_{n+3} &= (-1)^{n+2} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \left[(-1)^{-2} \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} + (-1)^{-1} \left(\frac{1}{2}\right)^0\right] \Rightarrow \\ x_{n+2} - x_{n+3} &= (-1)^{n+2} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} [2-1] = (-1)^{n+2} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \end{aligned}$$

Dito isto, se $m > n$, então é possível combinar (3.5) com a desigualdade triangular para concluir que

$$\begin{aligned} |x_n - x_m| &\leq |x_n - x_{n+1}| + |x_{n+1} - x_{n+2}| + \cdots + |x_{m-1} - x_m| \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^n + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{m-2} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} \cdots + \frac{1}{2^{m-n-1}}\right) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} 2 = \frac{1}{2^{n-2}} \Rightarrow \\ |x_n - x_m| &\leq \frac{1}{2^{n-2}} = \frac{4}{2^n}. \end{aligned}$$

Como

$$\frac{4}{2^n} < \varepsilon \iff 2^n > 4/\varepsilon \iff n > \frac{\ln(4/\varepsilon)}{\ln 2},$$

se $H(\varepsilon)$ é um natural maior que $\frac{\ln(4/\varepsilon)}{\ln 2}$, então

$$m > n \geq H(\varepsilon) \Rightarrow n > \frac{\ln(4/\varepsilon)}{\ln 2} \Rightarrow \frac{4}{2^n} < \varepsilon \Rightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon.$$

Desta forma, X é uma sequência de Cauchy; logo, X é convergente.

Considere agora o problema de computar o valor do limite de X. Denote o valor em questão por x. A igualdade (3.4) implica que $x = 0,5(x+x)$. Infelizmente, essa última expressão não nos ajuda a achar o valor de x. Dito isto, lembre que a subsequência (x_{2n+1}) também converge para x. Agora, observe que $x_1 = 1$,

$$\begin{aligned} x_3 &= 1,5 = \frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2} \Rightarrow x_3 = x_1 + \frac{1}{2}, \\ x_5 &= 1,625 = \frac{13}{8} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} \Rightarrow x_5 = x_3 + \frac{1}{2^3}. \end{aligned}$$

Dito isto, é possível mostrar que

$$x_{2n+1} - x_{2n-1} = \frac{1}{2^{2n-1}}. \tag{3.7}$$

De fato,

$$\begin{aligned} x_{2n+1} - x_{2n-1} &= \frac{1}{2}(x_{2n-1} + x_{2n}) - x_{2n-1} = \frac{1}{2}(x_{2n} - x_{2n-1}) \Rightarrow \\ x_{2n+1} - x_{2n-1} &= -\frac{1}{2}(x_{2n-1} - x_{2n}). \end{aligned}$$

Combine a última igualdade com (3.6). Logo,

$$x_{2n+1} - x_{2n-1} = -\frac{1}{2}(-1)^{2n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}.$$

Assim sendo, é possível utilizar (3.7) e o princípio da indução para concluir que

$$x_{2n+1} = 1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^{2i-1}}. \tag{3.8}$$

Esboço: Como $x_3 = 1 + 1/2$, (3.8) é verdadeira para $n = 1$. Agora, assuma que essa igualdade se verifique. Combine-a com (3.7).

$$\begin{aligned} x_{2n+3} - x_{2n+1} &= \frac{1}{2^{2n+1}} \Rightarrow x_{2n+3} = x_{2n+1} + \frac{1}{2^{2n+1}} \Rightarrow x_{2n+3} = 1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^{2i-1}} + \frac{1}{2^{2n+1}} \Rightarrow \\ x_{2n+3} &= 1 + \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{2^{2i-1}} \end{aligned}$$

Por fim, observe que

$$
\begin{aligned}
x_{2n+1} &= 1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2^{2i-1}} = 1+2\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2^{2i}} = 1+2\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{4^{i}} = 1+2\frac{1/4-(1/4)^{n+1}}{1-1/4} \Rightarrow \\
x_{2n+1} &= 1+2\frac{1-1/4^{n}}{4-1} = 1+\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{4^{n}}\right) \Rightarrow \lim(x_{2n+1}) = 1+\frac{2}{3} = \frac{5}{3} = x.
\end{aligned}
$$

(b) Considere a sequência $Y = (y_n)$, onde $y_1 = 1$ e $y_{n+1} = y_n + \frac{(-1)^n}{(n+1)!}$. Ela não é monótona, pois o sinal do segundo termo na última soma se alterna conforme n é par ou impar. Contudo, ela é de Cauchy, pois para $m > n$,

$$
\begin{gathered}
y_m - y_n = y_m - y_{m-1} + y_{m-1} - y_{m-2} + ... + y_{n+2} - y_{n+1} + y_{n+1} - y_n = \\
\frac{(-1)^{m-1}}{m!} + \frac{(-1)^{m-2}}{(m-1)!} + ... + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+2)!} + \frac{(-1)^{n}}{(n+1)!} \Rightarrow \\
|y_m - y_n| \leq \frac{1}{m!} + \frac{1}{(m-1)!} + ... + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+1)!}.
\end{gathered}
$$

De acordo com o exemplo 1.2.4.e (p. 14 do livro texto), $2^n \leq (n+1)!$. Assim sendo,

$$
\begin{gathered}
|y_m - y_n| \leq \frac{1}{2^{m-1}} + \frac{1}{2^{m-2}} + ... + \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n}} = \frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{2^{m-2-n}}+\frac{1}{2^{m-1-n}}\right) \Rightarrow \\
|y_m - y_n| < \frac{1}{2^n}\frac{1}{1-1/2} \Rightarrow |y_m - y_n| < \frac{1}{2^{n-1}}
\end{gathered}
$$

Seja y o limite de Y. Como $-2^{-(n-1)} < y_m - y_n < 2^{-(n-1)}$, podemos fazer $m \to \infty$ para concluir que $-2^{-(n-1)} \leq y - y_n \leq 2^{-(n-1)}$. Logo,

$$
|y_n - y| \leq \frac{1}{2^{n-1}}.
$$

Desta forma, é possível utilizar y_n para obter estimativas o quão acurada quisermos de y. Procedimento: dado um erro δ, calcule obtenha um n_0 tal que $\frac{1}{2^{n_0-1}} \leq \delta$ e em seguida avalie y_{n_0}.

(c) A sequência (h_n), onde

$$
h_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n},
$$

já foi analisada no Exemplo 3.3.3(b). Ela é divergente. Se $m > n$, então

$$
h_m - h_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{m}.
$$

Utilize o fato de que $m > n$ para concluir que cada um dos $m-n$ termos do lado direito é maior que ou igual a $1/m$. Logo,

$$h_m - h_n \geq \frac{1}{m} + \frac{1}{m} + \cdots + \frac{1}{m} = \frac{m-n}{m}.$$

Faça $m = 2n$ para concluir que

$$h_{2n} - h_n \geq \frac{2n-n}{2n} \geq \frac{1}{2}.$$

Assim sendo, (h_n) não é de Cauchy. □

Definição 3.5.7 Uma sequência X de números reais é dita ser **contrativa** (ou uma **contração**) se existir uma constante $C \in (0,1)$ tal que

$$|x_{n+2} - x_{n+1}| \leq C|x_{n+1} - x_n| \tag{3.9}$$

para todo $n \in N$.

- The number C is called the **constant** of the contractive sequence. The?

Teorema 3.5.8 Toda sequência contrativa é uma sequência de Cauchy e, consequentemente, convergente.

Prova. Seja X uma sequência contrativa. Tendo em vista o Teorema 3.5.5, basta mostrar que X é de Cauchy. É possível mostrar que

$$|x_{n+2} - x_{n+1}| \leq C^n|x_2 - x_1| \tag{3.10}$$

para todo n. De fato, (3.9) implica que (3.10) é verdadeira para $n = 1$. Agora, suponha (3.10) seja verdadeira para um n genérico. Utilize (3.9) para concluir que

$$|x_{n+3} - x_{n+2}| \leq C|x_{n+2} - x_{n+1}| \leq C\left(C^n|x_2 - x_1|\right) \Rightarrow |x_{n+3} - x_{n+2}| \leq C^{n+1}|x_2 - x_1|.$$

Por outro lado, se $m > n$, então

$$|x_m - x_n| \leq |x_m - x_{m-1}| + |x_{m-1} - x_{m-2}| + \cdots + |x_{n+1} - x_n|.$$

Combine essa última expressão com (3.10) para concluir que

$$\begin{aligned}
|x_m - x_n| &\leq C^{m-2}|x_2 - x_1| + C^{m-3}|x_2 - x_1| + \cdots + C^{n-1}|x_2 - x_1| \Rightarrow \\
|x_m - x_n| &\leq (C^{m-2} + C^{m-3} + \cdots + C^{n-1})|x_2 - x_1| \Rightarrow \\
|x_m - x_n| &\leq C^{n-1}\left[C^{(m-2)-(n-1)} + C^{(m-3)-(n-1)} + \cdots + C + 1\right]|x_2 - x_1| \Rightarrow \\
|x_m - x_n| &\leq C^{n-1}[1 + C + C^2 + ...]|x_2 - x_1| = C^{n-1}\frac{1}{1-C}|x_2 - x_1|.
\end{aligned}$$

Como $C \in (0,1)$, $\lim(C^{n-1}) = 0$. Logo, X é uma sequência de Cauchy. □

- Discutir a última frase ($n \to \infty$).