Indexação e Metas de Inflação*

Alexandre B. Cunha†

Realiza-se neste artigo uma investigação teórica de como a existência de indexação impacta o funcionamento do sistema de metas de inflação. Para tanto, utiliza-se um jogo repetido construído a partir da incorporação da indexação e do regime de metas no modelo de Kydland e Prescott e Barro e Gordon. Mostra-se que, ao contrário da visão tradicional sobre a questão, a indexação contribui para a implementação da meta estabelecida para a taxa de inflação. Essa conclusão levanta a possibilidade de que uma eventual redução do grau de indexação da economia brasileira pode inviabilizar o funcionamento do sistema de metas.

Palavras-chave: indexação, metas de inflação, jogo repetido.

Códigos JEL: E52, E58, E61.

1 Introdução

A indexação tem sido uma característica da economia brasileira pelos menos desde 1964, quando o Plano de Ação Econômica do Governo (PAEG) instituiu a correção monetária. Com o Plano Real e a reforma monetária de 1994 ocorreu uma desindexação parcial, pois se proibiu a indexação de contratos com prazo de vigência inferior a um ano. Alguns economistas argumentam que o fato de ainda existir indexação, mesmo que restrita, faz com que a política monetária seja menos eficaz para controlar e/ou reduzir a taxa de inflação.

Estuda-se neste ensaio como a indexação pode afetar o funcionamento do regime de metas de inflação, o qual está em vigor no Brasil desde 1999. Mostra-se que a sabedoria convencional, na qual a existência da indexação dificulta a obtenção de taxas de inflação mais modestas, está, na melhor das hipóteses, incompleta. De fato, estivesse a relação estratégica entre o banco central e o setor privada restrita a uma única data no tempo, o entendimento tradicional estaria correto. Contudo, quando se leva em conta a natureza intertemporal da interação entre o banco central e os demais agentes, chega-se

*O autor agradece o apoio financeiro do CNPq. O artigo se beneficiou dos comentários de Eurilton Araújo, Antonio Luis Licha e Viviane Luporini. Eventuais erros e imperfeições são de responsabilidade do autor.

†Universidade Federal do Rio de Janeiro. Website: http://www.alexbcunha.com.

à conclusão oposta: a existência da indexação pode contribuir para a implementação de taxas de inflação mais baixas.

A ideia de que é desejável reduzir o grau de indexação da economia brasileira é expressa de forma inequívoca por diversos profissionais da área de Economia. Seguem-se alguns poucos exemplos representativos de declarações que externam tal entendimento. Marconi (2017) afirma que "reduzir a inflação no Brasil de forma mais acelerada e com menores custos sociais requer a desindexação da economia". Segundo Bresser-Pereira (2016), "Outra reforma urgente, que ainda não está na agenda do país, é a desindexação. Sem a desindexação completa o custo de combater a inflação é muito grande". Por sua vez, Oreiro (2014) argumenta que "A estabilidade da inflação a médio-prazo será obtida pela combinação entre a austeridade gerada [por um] novo regime fiscal e pela desindexação total da economia".

O fato de a inflação presente ser parcialmente determinada, via indexação, pela inflação pretérita potencialmente dificulta a redução da taxa de inflação em uma *dada* data. Todavia, o processo de determinação das taxas de inflação possui uma natureza *intertemporal*. Há também que se levar em consideração a interação estratégica entre o banco central e os demais agentes econômicos. Em particular, o incentivo para que esses jogadores estejam dispostos a se comportarem de maneira cooperativa de forma que se alcance uma taxa de inflação mais baixa depende do quão melhor é tal equilíbrio vis-à-vis um equilíbrio não cooperativo. E, conforme se discute no próximo parágrafo, é exatamente nesse ponto que o raciocínio subjacente à sabedoria convencional falha.

Efetivamente, uma redução do grau de indexação leva a uma queda da taxa de inflação em um equilíbrio não cooperativo. Contudo, em um jogo intertemporal há espaço para que os jogadores cooperem de forma a atingir resultados que são superiores, sob o ponto de vista desses agentes, à solução não cooperativa. Ora, se o banco central for avesso à inflação, então o resultado não cooperativo se torna menos desagradável para esse jogador. Consequentemente, ele estará menos propenso a implementar uma estratégia cooperativa necessária para se alcance uma solução na qual a taxa de inflação seja menor do que aquela atingida no equilíbrio sem cooperação.

O leitor familiarizado com a literatura de jogos repetidos possivelmente identificou nos parágrafos anteriores os elementos de um argumento que lhe é conhecido. Assuma que quanto mais indexada for uma economia, maior será a taxa de inflação de equilíbrio em um jogo base[1] no qual a interação estratégica entre banco central e setor privado é exclusivamente intratemporal. Suponha agora que o payoff do banco central seja estritamente decrescente na taxa de inflação. Logo, quanto menor for o grau de indexação, melhor será esse equilíbrio sob o ponto de vista da autoridade monetária. Consequentemente, uma eventual desindexação da economia reduziria o incentivo desse jogador em

[1] Quanto utilizada neste artigo, a expressão *jogo base* deve ser entendida como equivalente à inglesa *stage game*.

agir de forma cooperativa de forma a atingir, em um jogo repetido infinita vezes, um resultado distinto do equilíbrio do jogo base.

Os resultados discutidos acima foram obtidos em uma variante do modelo utilizado por KP (Kydland e Prescott, 1977) e BG (Barro e Gordon, 1983a e 1983b) para analisar o problema de regras versus discricionariedade na condução da política macroeconômica. O modelo em questão é bastante popular, sendo discutido em diversos livros, como Drazen (2000), Gibbons (1992), Modenesi (2005) e Walsh (2017). Adicionalmente, variantes do mesmo são adotada em artigos recentes, como Frankel e Kartik (2018) e Griebeler (2015). Possivelmente, o modelo de KP e BG é o ponto de partida mais comum para estudo de questões relacionadas a política monetária que envolvam a interação estratégica entre o banco central e o setor privado.

A análise contida neste artigo contém três passos principais. Inicialmente, estuda-se um jogo base similar ao analisado em Gibbons (1992). O setor privado seleciona a sua expectativa para a taxa de inflação π^e. Após observar π^e, o banco central seleciona a taxa de inflação π e produto. As escolhas da autoridade monetária são restritas por uma Curva de Phillips cujo coeficiente angular depende do grau de indexação da economia.[2] Quanto mais indexada for a economia, mais custoso será, em termos de redução do produto, para o banco central reduzir a taxa de inflação. No tocante às preferências, o setor privado simplesmente deseja acertar a sua previsão da taxa de inflação, ao passo que o *payoff* da autoridade monetária é uma função de perda quadrática na qual os objetivos subjacentes são atingir uma taxa de inflação nula e fazer com que o PIB da economia exceda o seu nível natural. Esse jogo possui um único equilíbrio. Em consonância com a visão convencional da relação entre indexação e inflação, o valor de equilíbrio $\hat{\pi}$ dessa variável é uma função crescente do grau de indexação.

O segundo passo consiste em introduzir o regime de metas no jogo base. Assume-se que existe um alvo exógeno π^* para a taxa de inflação. Se o valor realizado dessa variável for distinta do alvo, então o banco central incorre em uma penalidade positiva C. Mostra-se que se C for suficientemente alto, então existe um único equilíbrio no qual a inflação assume o valor π^*. Se C for suficientemente baixo, então, o sistema de metas é irrelevante e a inflação de equilíbrio é igual a $\hat{\pi}$. Para valores intermediários de C, existem exatamente duas taxas de equilíbrio (π^* e $\hat{\pi}$).

Cabe aqui um breve comentário sobre a relação entre o valor da penalidade C e a robustez das instituições governamentais. No modelo adotado neste ensaio, C é o único instrumento que o governo[3] possui para induzir o banco central a conduzir a política

[2] Conforme é demonstrado na Seção 2, uma Curva de Phillips com a propriedade em questão é obtida a partir da combinação de duas hipóteses: (i) alguns preços são reajustados de acordo com a inflação do período anterior e (ii) a inflação dos preços livres (i.e., preços não indexados) se relaciona o hiato do produto por meio de uma Curva de Phillips padrão.

[3] Enfatiza-se que neste artigo a expressão *governo* é utilizada em um sentido amplo. Ou seja, esse conceito engloba o poder executivo, o legislativo, o judiciário e demais componentes do aparato estatal.

monetária de forma que a taxa de inflação realizada seja igual a π^*. Assim sendo, pode-se interpretar C como uma medida da robustez das instituições que devem avaliar e/ou monitorar a atuação da autoridade monetária.

A terceira etapa consiste em analisar o jogo intertemporal constituído pela repetição infinita do jogo base com metas de inflação. Assume-se que C é suficientemente pequeno para que π^* não seja um resultado do jogo base. Há pelo menos dois motivos para se adotar tal hipótese. Diversos autores destacam os impactos do regime de metas sobre a dimensão intertemporal da interação entre os agentes econômicos.[4] Ora, se π^* fosse um resultado do jogo base, então a sua implementação não requereria coordenação e cooperação, ao longo do tempo, entre os jogadores. Desta forma, excluir-se-ia do problema estudado justamente uma das suas mais importantes características. Segundo, conforme mencionado no parágrafo anterior, o valor de C pode ser interpretado como uma medida de robustez das instituições. E, na visão deste autor, seria irrealista assumir que as instituições brasileiras são sólidas o suficiente para garantir que a meta de inflação será implementada independentemente do *feedback* intertemporal entre as ações da autoridade monetária e do setor privado.

O estudo dos possíveis equilíbrios do jogo repetido revela que, ao contrário da sabedoria convencional, a indexação pode contribuir para a redução da taxa de inflação. A intuição por trás desta conclusão é aquela discutida alguns parágrafos acima. Quanto maior for o grau de indexação, maior será a taxa de inflação no equilíbrio do jogo base. Logo, pior será tal equilíbrio sob o ponto de vista do banco central. Consequentemente, maior será o incentivo desse agente em agir de maneira cooperativa e implementar a taxa de inflação π^* no jogo repetido.

Uma simples extensão dos argumentos apresentados acima permite que se obtenha uma interessante conclusão: a indexação pode substituir, mesmo que de maneira imperfeita, instituições robustas. No jogo repetido, o banco central incorre em duas punições se ele não implementar a meta π^*: (1) a penalidade C e (2) a reversão para o equilíbrio do jogo base. A segunda delas é tão maior quanto maior for o grau de indexação. Consequentemente, a indexação impõe uma disciplina adicional à autoridade monetária. Desta forma, pode ocorrer que, dado o valor de C, o sucesso do regime de metas requeira a existência de indexação. Em outras palavras, a indexação pode viabilizar uma política pública que sozinhas as instituições não estariam aptas a implementar.

Afirmou-se no penúltimo parágrafo que *a indexação pode contribuir para a redução da taxa de inflação.* A utilização da expressão *pode contribuir* foi proposital. Conforme é discutido na Subseção 5.2, também pode ocorrer que π^* seja um resultado do jogo

[4] Por exemplo, Bernanke, Laubach, Mishkin e Posen (1999, p. 24) afirmam que "inflation targeting requires an accounting to the public of the projected long-run implications of [the central bank's] short-run policy actions". De acordo com Svensson (2011, p. 1250), "Inflation targeting has stabilized long-run inflation expectations". Por sua vez, Walsh (2009, p. 221) menciona "the importance of forward-looking expectations for current macroeconomic developments".

repetido independentemente do grau de indexação da economia. Por tal motivo, a resposta para a pergunta "É possível reduzir o grau de indexação da economia brasileira sem que isso inviabilize o sistema de metas?" necessariamente requer uma investigação empírica. Assim sendo, a realização de uma análise econométrica desse ponto específico é uma possível via a ser seguida por aqueles que desejarem investigar a relação entre indexação e o sistema de metas.

Conforme mencionado previamente, a análise realizada neste artigo tomou como ponto de partida um modelo similar ao de KP e BG. Mais especificamente, a relação de Phillips é uma curva de oferta de Lucas. É natural que se indague se os resultados são válidos em outros contextos. Mostra-se na Seção 6 do ensaio que, em linhas gerais, as conclusões também podem ser obtidas em um modelo no qual a Curva de Phillips seja, conforme é usual na literatura novo-keynesiana, do tipo *forward-looking*.

Em uma primeira leitura, as conclusões apresentadas neste texto podem parecer inconsistentes com a experiência brasileira. Afinal de contas, uma das medidas do Plano Real consistiu em proibir que contratos com prazo inferior a um ano fossem indexados. Logo, é razoável supor que a medida em questão contribuiu para o sucesso do programa de estabilização. Por outro lado, argumenta-se neste texto que a desindexação da economia brasileira pode levar a uma elevação da taxa de inflação. Contudo, há uma explicação simples para esse aparente paradoxo. Nas vésperas da reforma monetária, todos ou quase todos os preços estavam referenciados à URV e esse indicador era corrigido diariamente; consequentemente, a desindexação contribuiu para a estabilização dos preços. O quadro atual é bem distinto. Vários preços não estão indexados; logo, uma redução do grau de indexação não contribuirá diretamente para que eles se estabilizem. E, conforme discutido acima, tal redução pode dificultar o funcionamento do sistema de metas de inflação, o qual não estava em vigor no momento da estabilização. Outro ponto a ser levado em consideração é a diferença entre os impactos da indexação em um cenário no qual a inflação excede 20% mensais e aquele no qual ela é inferior a 1% ao mês. Em síntese, não há motivos para se assumir que a presente relação entre inflação e indexação seja similar à que prevaleceu até o advento do real.

O restante deste texto está organizado da seguinte forma. Obtém-se na Seção 2 uma Curva de Phillips na qual a relação entre inflação e hiato do produto depende do grau de indexação da economia. Discute-se na Seção 3 o jogo base. O jogo repetido é estudado na Seção 4. Os efeitos da indexação sobre o sistema de metas de inflação e as consequentes implicações para a política econômica são analisadas na Seção 5. Mostra-se na Seção 6 que os resultados são robustos a especificações alternativas da Curva de Phillips. As considerações finais são apresentadas na Seção 7. Por fim, as provas dos lemas e das proposições estão disponíveis no Apêndice.

2 Curva de Phillips e indexação

Este breve seção tem dois objetivos. O primeiro é ilustrar como que a indexação pode afetar a relação entre inflação e produto intrínseca à Curva de Phillips. O segundo consiste em mostrar como mensurar o grau de indexação da economia no contexto do modelo analisado neste texto.

O tempo é mensurado de forma discreta. Seja π_t a taxa de inflação na data t. Assume-se que aquela variável é uma média ponderada de duas outras. A primeira é a taxa de variação dos preços livres, os quais são determinados pelos mercados. A segunda é a taxa de variação dos preços administrados, os quais são corrigidos pela inflação do período anterior. Desta forma,

$$\pi_t = (1 - a)\theta_t + a\pi_{t-1}, \tag{1}$$

onde θ_t é taxa de inflação dos preços livres e a é um número no intervalo $[0, 1)$. O parâmetro a corresponde ao *grau de indexação* da economia. Quanto mais próximo a estiver de 1, maior será a relevância dos preços indexados para a determinação da taxa de inflação contemporânea.

Sejam y o produto e $\bar{y}$ o produto natural. Essas duas variáveis se relacionam com a inflação dos preços livres de acordo com a relação de Phillips

$$\theta_t = \theta_t^e + \eta(y_t - \bar{y}),\ \eta > 0.$$

Vale ressaltar que, conforme a notação usual na literatura, a combinação do sobrescrito e com o subscrito t denota a esperança matemática da variável em questão condicionada à informação disponível no início da data t.

A última igualdade é equivalente à

$$(1 - a)\theta_t = (1 - a)\theta_t^e + (1 - a)\eta(y_t - \bar{y}).$$

Pode-se então concluir que

$$\pi_t = (1 - a)\theta_t^e + (1 - a)\eta(y_t - \bar{y}) + a\pi_{t-1}. \tag{2}$$

Por outro lado, (1) implica que

$$(1 - a)\theta_t = \pi_t - a\pi_{t-1} \Rightarrow (1 - a)\theta_t^e = \pi_t^e - a\pi_{t-1}.$$

Combine a última igualdade com (2). Esse procedimento estabelece que

$$\pi_t = \pi_t^e + (1 - a)\eta(y_t - \bar{y}). \tag{3}$$

Essa relação é, evidentemente, uma Curva de Phillips. Observe que quanto maior for o grau de indexação a da economia, maior é a queda do produto necessária para obter uma mesma redução na taxa de inflação. Assim sendo, a equação (3) satisfaz a condição de que um maior de grau de indexação torna mais custoso combater a inflação.

Para referência futura, convém expressar a Curva de Phillips acima na forma

$$y_t = \bar{y} + \mu(\pi_t - \pi_t^e), \tag{4}$$

onde

$$\mu = \frac{1}{(1-a)\eta}. \tag{5}$$

Observe que μ é uma função estritamente crescente de a. Adicionalmente, $\mu \in [1/\eta, \infty)$, pois $a \in [0,1)$.

3 O jogo base

O objetivo desta seção é introduzir um jogo base que tenha o sistema de metas de inflação como um dos seus elementos constituintes. Com intuito de tornar a exposição mais clara, estuda-se em um primeiro momento um jogo sem o sistema de metas. Em seguida, modifica-se aquele jogo de formar a incorporar o sistema em questão.

3.1 Um jogo base sem metas de inflação

O jogo estudado nesta subseção é extremamente similar àquele analisado por Gibbons (1992) ao discutir a contribuição de BG. Existem dois jogadores: p (setor privado) e b (banco central). Em um primeiro momento, p escolhe a sua expectativa de inflação π^e. Como a taxa de inflação precisa exceder -100%, impõe-se a restrição $\pi^e \in A$, onde $A = (-1, \infty)$. Após observar π^e, o banco central seleciona um par (π, y) que satisfaça a Curva de Phillips (4).[5] Adicionalmente, $\pi \in A$ e $y \in \mathbb{R}_+$. O *payoff* do setor privado é dado por

$$u_p(\pi^e, \pi) = -(\pi^e - \pi)^2, \tag{6}$$

ao passo que o *payoff* do banco central é descrito por

$$u_b(y, \pi) = -k\pi^2 - [y - (1+\gamma)\bar{y}]^2,$$

onde k e γ são parâmetros positivos.

A função de *payoff* especificada para p é tal que esse jogador tem como objetivo prever corretamente a inflação. No caso de b, o seu *payoff* é uma função de perda

[5] Vale ressaltar que o banco central não escolhe y diretamente. A hipótese subjacente é que esse jogador irá conduzir a política monetária de forma a alcançar o produto desejado e as suas escolhas são restritas pela igualdade (4).

quadrática padrão. O agente em questão tem dois objetivos possivelmente conflitantes: (i) fazer com que a inflação fique o mais próxima possível de zero e (ii) fazer com que o produto supere o seu patamar natural em 100γ pontos percentuais. O parâmetro k define os pesos relativos atribuídos aos alvos (i) e (ii).

Seguindo o procedimento usualmente adotado ao se resolver esse tipo de jogo, o próximo passo consiste em simplificar a análise por meio da eliminação da variável y. Para tanto, utiliza-se a restrição (4) para reescrever o *payoff* do banco central como função de π e π^e. Mais especificamente, defina a função F de forma que $F(\pi^e, \pi) = u_b(\bar{y} + \mu(\pi - \pi^e), \pi)$. Assim sendo,

$$F(\pi^e, \pi) = -k\pi^2 - [\mu(\pi - \pi^e) - \gamma\bar{y}]^2. \tag{7}$$

Ressalta-se para referência futura que, fixado π^e, a função F é estritamente côncava em π.

Feita a simplificação acima, tem-se o jogo descrito a seguir. O jogador p escolhe $\pi^e \in A$; o seu *payoff* é dado por (6). Após observar π^e, o agente b seleciona $\pi \in A$. O *payoff* desse jogador está especificado em (7). Uma estratégia para p é um elemento de A, ao passo que uma estratégia para b é uma função com domínio e contradomínio em A. Dada a ação π^e, o problema do banco central é

$$\max_{\pi \in A} F(\pi^e, \pi). \tag{8}$$

Seja $R(\pi^e)$ a solução desse problema. O setor privado seleciona $\pi^e \in A$ de forma resolver o problema

$$\max_{\pi^e \in A} u_p(\pi^e, R(\pi^e)). \tag{9}$$

Um *equilíbrio* para o jogo base sem metas de inflação é um par $(\hat{\pi}^e, R)$ tal que $R(\pi^e)$ resolve, para todo π^e, o problema de b e $\hat{\pi}^e$ resolve o problema de p. Um *resultado* para esse jogo é um vetor $(\hat{\pi}, \hat{\pi}^e)$ para o qual existe uma função R tal que $(\hat{\pi}^e, R)$ é um equilíbrio e $R(\hat{\pi}^e) = \hat{\pi}$.

Mostra-se a seguir que o jogo possui um único resultado. Denote as derivadas parciais de $F(\pi^e, \pi)$ com respeito a π^e e π por, respectivamente, F_1 e F_2. A concavidade estrita de F com respeito a π assegura que a condição de primeira ordem

$$F_2(\pi^e, R(\pi^e)) = 0 \tag{10}$$

do problema (8) é necessária e suficiente para um máximo global. Assim sendo, a função R é dada por

$$R(\pi^e) = \frac{\mu^2}{k + \mu^2}\pi^e + \frac{\mu\gamma}{k + \mu^2}\bar{y}. \tag{11}$$

Como p deseja prever a inflação de forma correta e R é própria taxa de inflação selecionada pelo banco central, a resolução do problema (9) requer que $\hat{\pi}^e = R(\hat{\pi}^e)$. Logo, $\hat{\pi}^e = (\mu\gamma/k)\bar{y}$. Em seguida, utilize o fato de que $\hat{\pi} = \hat{\pi}^e$ para concluir que

$$\hat{\pi} = \frac{\mu\gamma}{k}\bar{y}. \tag{12}$$

Essa igualdade combinada com (5) estabelece que

$$\hat{\pi} = \frac{\gamma}{(1-a)\eta k}\bar{y}. \tag{13}$$

No tocante ao produto de equilíbrio $\hat{y}$, o fato de que $\hat{\pi} = \hat{\pi}^e$ implica que $\hat{y} = \bar{y}$. Ou seja, assim como nos modelos de KP e BG, a tentativa do banco central de utilizar o *tradeoff* inerente à Curva de Phillips gera tão somente inflação. Em equilíbrio, o produto não ultrapassa o seu valor natural.

Encerra-se esta subseção com uma breve análise da relação entre taxa de inflação de equilíbrio $\hat{\pi}$ e o grau de indexação a. Claramente, $\hat{\pi}$ é uma função estritamente crescente de a. Essa propriedade é consistente com a visão de que um maior grau de indexação tende a gerar uma inflação mais elevada. Adicionalmente, $\lim_{a\to 1^-} \hat{\pi} = \infty$. Logo, à medida que o grau de indexação se aproxima do seu valor máximo, a taxa de inflação de equilíbrio se torna infinitamente grande.

3.2 Introduzindo o sistema de metas de inflação

A tarefa a ser realizada nesta parte do artigo consiste em modificar o jogo da subseção anterior de forma a incorporar o sistema de metas de inflação. Certamente, existe mais de uma maneira de executar tal tarefa. O leitor poderá observar que a solução adotada tem a importante vantagem de incorporar o sistema de metas inflação de forma extremamente simples e intuitiva.

Suponha que existe uma meta de inflação exógena π^*. Essa variável satisfaz as desigualdades

$$0 < \pi^* < (\gamma\bar{y})/(\eta k).$$

Observe que $(\gamma\bar{y})/(\eta k)$ é igual ao valor que $\hat{\pi}$ assume quando $a = 0$. Como $\hat{\pi}$ é uma função estritamente crescente de a, está se assumindo que a meta π^* é menor que $\hat{\pi}$ para todo e qualquer valor de a. Desta forma, não há como se atingir, no jogo base da subseção anterior, π^* apenas alterando o grau de indexação da economia.

A última modificação consiste em estabelecer uma penalidade para o banco central caso a meta de inflação não seja atingida. Defina a função indicadora $I(\pi)$ de forma que $I(\pi) = 0$ se $\pi = \pi^*$ e $I(\pi) = 1$ se $\pi \neq \pi^*$. Seja $C > 0$ uma constante. O *payoff* do banco central passa a ser dado por

$$G(\pi^e, \pi) = F(\pi^e, \pi) - CI(\pi).$$

Consequentemente, o jogador b incorre no custo C sempre que ele implementar uma taxa de inflação distinta da meta π^*.[6]

Convém que sejam feitos dois comentários sobre a última hipótese. Primeiro, ela é similar à adotada por Obstfeld (1994) ao estudar o fenômeno das crises cambiais. Aquele autor assume que o banco central incorre uma penalidade sempre que ele permite que a taxa de câmbio se modifique. Segundo, o valor da penalidade pode ser associado à solidez das instituições de um país. Mais especificamente, em uma nação com instituições frágeis o valor de C tende a ser menor do que a sua contrapartida em um país no qual as instituições sejam mais robustas.

Tendo em vista que a função G é descontínua, convém que se discuta como se resolve o problema de otimização do banco central. Assim como na subseção anterior, $R(\pi^e)$ continuará a denotar a solução do problema (8). Fixado o valor de π^e, G possui uma única descontinuidade. Assim sendo, o problema em questão pode ser resolvido em dois estágios. Primeiro, computa-se $R(\pi^e)$. Segundo, comparam-se os valores de $G(\pi^e, R(\pi^e))$ e $G(\pi^e, \pi^*)$; a solução será a ação que proporcionar o maior *payoff*. Desta forma, dada uma ação π^e do setor privado, a ação ótima do banco central será igual a $R(\pi^e)$ ou a π^*.

A despeito modificações acima descritas, a estrutura do jogo é igual àquela que foi discutida na subseção 3.1. Inclusive, as definições de equilíbrio e resultado não se alteram.

Discute-se a seguir a caracterização dos equilíbrios. O valor da penalidade C tem um papel central na análise. A idéia é relativamente simples. Se C for suficientemente alto, $\pi^e = \pi = \pi^*$ será o único resultado; se C for suficientemente baixo, o único resultado será $\pi^e = \pi = \hat{\pi}$. Para valores intermediários de C, admitem-se aqueles dois resultados. Em outras palavras, uma penalidade suficientemente alta garante que o banco central implementará a meta π^*; uma penalidade muito baixa é irrelevante e não impacta o equilíbrio identificado na subseção anterior; por fim, uma penalidade intermediária gera equilíbrios múltiplos.

O próximo passo consiste em caracterizar os valores de C para os quais pode se ter cada uma das situações descrita no parágrafo anterior. Defina o valor crítico c_1 de acordo com

$$c_1 = F(\pi^*, R(\pi^*)) - F(\pi^*, \pi^*). \tag{14}$$

Vale ressaltar que c_1 é justamente o valor de C para o qual o banco central fica indiferente entre implementar π^* ou $R(\pi^*)$ se p tiver jogado $\pi^e = \pi^*$. Adicionalmente, $R(\pi^*)$ maximiza $F(\pi^*, \pi)$ e $R(\pi^*) \neq \pi^*$ (pois $\hat{\pi}$ é o único ponto fixo de R). Pode-se então

[6] Walsh (2017, p. 272) sugere que, existindo uma meta para inflação, deve se assumir que o *payoff* do banco central é dado por $F(\pi^e, \pi) = -k(\pi - \pi^*)^2 - [\mu(\pi - \pi^e) - \gamma\bar{y}]^2$. Tal abordagem tem a desvantagem de assumir que o governo é capaz de modificar as preferências de um dos jogadores. Por outro lado, a solução adotado neste ensaio está mais em linha com a visão geral da moderna ciência econômica, a qual toma elementos como preferências e possibilidades tecnológicas como dados.

concluir que $F(\pi^*, R(\pi^*)) > F(\pi^*, \pi^*)$. Assim sendo, $c_1 > 0$. Agora, defina c_2 de forma que

$$c_2 = F(\hat{\pi}, R(\hat{\pi})) - F(\hat{\pi}, \pi^*). \tag{15}$$

Observe que c_2 corresponde ao valor de C para o qual o banco central fica indiferente entre implementar π^* ou $R(\hat{\pi})$ se p tiver jogado $\pi^e = \hat{\pi}$. Assim como c_1, c_2 é um número positivo.

Lema 1 *Os valores críticos c_1 e c_2 satisfazem a desigualdade $c_1 < c_2$.*

As demonstrações desse e dos demais lemas e proposições deste artigo estão disponíveis no Apêndice. Dando continuidade a análise, a próxima proposição caracteriza completamente o conjunto de resultados.

Proposição 1 *Se $C < c_1$, então existe um único equilíbrio cujo resultado é $\pi^e = \pi = \hat{\pi}$. Se $C > c_2$, então existe um único equilíbrio cujo resultado é $\pi^e = \pi = \pi^*$. Se $C \in [c_1, c_2]$, então existem exatamente dois equilíbrios cujos resultados são $\pi^e = \pi = \hat{\pi}$ e $\pi^e = \pi = \pi^*$.*

Conclui-se esta seção com um breve resumo da mesma. Inicialmente, estudou-se um jogo base similar àqueles estudados por KP e BG. Contudo, no modelo aqui analisado o *tradeoff* entre inflação e produto inerente à Curva de Phillips depende do grau de indexação da economia. Verificou-se que a taxa de inflação de equilíbrio $\hat{\pi}$ é uma função estritamente crescente do grau em questão. Em seguida, o jogo base foi modificado de forma a incorporar o sistema de metas de inflação. Para tanto, realizaram-se duas alterações. Primeiro, introduziu-se uma meta exógena π^* para a inflação. Segundo, assumiu-se que o banco central incorreria em uma penalidade (ou seja, uma redução no seu *payoff*) C sempre que a inflação realizada fosse distinta da meta. Se a penalidade for suficientemente baixa, ela é irrelevante e $\hat{\pi}$ é a única taxa de inflação de equilíbrio. Se a penalidade for elevada o suficiente, existe um único resultado e $\pi = \pi^*$. Para valores intermediários de C, há dois equilíbrios, nos quais $\pi = \hat{\pi}$ e $\pi = \pi^*$.

4 O jogo repetido

Esta seção tem como objetivo entender a maneira pela qual a indexação afeta a capacidade do banco central de implementar a meta de inflação em um contexto intertemporal. Para tanto, estuda-se o jogo constituído pela repetição infinita do jogo base com metas de inflação discutido na subseção 3.2.

4.1 Descrição do jogo

Seja $h^t = [(\pi_0^e, \pi_0), (\pi_1^e, \pi_1), ..., (\pi_t^e, \pi_t)]$ uma história de ações. A cada data t, o setor privado escolhe uma ação π_t^e como função da história h^{t-1}. Denote essa escolha por $\rho_t(h^{t-1})$. Após observar π_t^e, o banco central seleciona uma taxa de inflação π_t como função de (h^{t-1}, π_t^e). A escolha do banco central é denotada por $\sigma_t(h^{t-1}, \pi_t^e)$. Uma estratégia para o setor privado é uma sequência $\rho = \{\rho_t\}_{t=0}^{\infty}$, ao passo que $\sigma = \{\sigma_t\}_{t=0}^{\infty}$ é uma estratégia para o banco central. Dado um par de estratégias (ρ, σ) e uma história h^{t-1}, o vetor (π_t^e, π_t) é determinado de acordo com a lei de movimento

$$(\pi_t^e, \pi_t) = \left(\rho_t(h^{t-1}), \sigma_t(h^{t-1}, \rho_t(h^{t-1}))\right). \tag{16}$$

Sejam δ_p e δ_b duas constantes no intervalo $(0, 1)$. A cada data t, o *payoff* do setor privado é dado por

$$\sum_{s=t}^{\infty} \delta_p^{s-t} u_p(\pi_s^e, \pi_s), \tag{17}$$

ao passo que o *payoff* do banco central satisfaz

$$\sum_{s=t}^{\infty} \delta_b^{s-t} G(\pi_s^e, \pi_s). \tag{18}$$

Ou seja, o *payoff* de cada jogador é igual à soma descontada dos correspondentes *payoffs* no jogo base com metas de inflação.[7]

Conclui-se a descrição do jogo apresentando o problema a ser resolvido por cada jogador. Dado um plano de ações $\{\sigma_s\}_{s=t}^{\infty}$ para o banco central e uma história h^{t-1}, a cada data t o setor privado escolhe $\{\rho_s\}_{s=t}^{\infty}$ de forma a maximizar (17). Dado um plano de ações $\{\rho_s\}_{s=t+1}^{\infty}$ para o setor privado e um par (h^{t-1}, π_t^e), o banco central escolhe $\{\sigma_s\}_{s=t}^{\infty}$ de forma a maximizar (18). Ambos os jogadores levam em consideração que o vetor (π_t, π_t^e) é determinado de acordo com a regra (16).

4.2 Equilíbrio

Um *equilíbrio* para o jogo repetido é um par (ρ, σ) tal que: (i) dado $\{\sigma_s\}_{s=t}^{\infty}$, $\{\rho_s\}_{s=t}^{\infty}$ resolve o problema do jogador p para toda história h^{t-1} e (ii) dado $\{\rho_s\}_{s=t+1}^{\infty}$, $\{\sigma_s\}_{s=t}^{\infty}$ resolve o problema do jogador b para todo par (h^{t-1}, π_t^e). Um *resultado* para o jogo

[7] É irrelevante para os resultados obtidos neste artigo se os fatores intertemporais de desconto δ_p e δ_b são ou não iguais. Adicionalmente, utilizou-se δ para denotar esses parâmetros, ao invés da notação mais usual β, para enfatizar que o fator de desconto cada jogador não é necessariamente igual ao fator de desconto de uma família representativa que habite uma economia na qual à Curva de Phillips (3) se verifique.

repetido é uma sequência $\{\pi_t^e, \pi_t\}_{t=0}^{\infty}$ para a qual existe um equilíbrio (ρ, σ) com a seguinte propriedade: se $h^{t-1} = [(\pi_0^e, \pi_0), (\pi_1^e, \pi_1), ..., (\pi_{t-1}^e, \pi_{t-1})]$, então $\rho_t(h^{t-1}) = \pi_t^e$ e $\sigma_t(h^{t-1}, \pi_t^e) = \pi_t$.

Denote por Π^* a sequência $\{\pi_t^e, \pi_t\}_{t=0}^{\infty}$ na qual $\pi_t^e = \pi_t = \pi^*$ para todo t. O próximo passo consiste em caracterizar sob que condições Π^* é um resultado do jogo repetido. Seguindo o procedimento padrão, a caracterização é feita a partir do resultado do jogo base. Contudo, conforme estabelecido na Proposição 1, a existência e a caracterização do equilíbrio do jogo base depende dos valores C, c_1 e c_2. Entende-se que o único caso relevante é aquele em que $C < c_1$. Há dois motivos para tanto. Primeiro, somente quando essa desigualdade é satisfeita que π^* não é um resultado do jogo base; assim sendo, a implementação de π^* requer uma coordenação intertemporal das ações do banco central e do setor privado. Tendo em vista que importantes efeitos do sistema de metas de inflação são de natureza intertemporal[8], não assumir que $C < c_1$ permitiria que tais efeitos fossem ignorados. Segundo, tendo em vista que C pode ser interpretado como uma métrica de robustez institucional, assumir que π^* é um equilíbrio do jogo base é equivalente a postular que as instituições são fortes o suficiente para garantir que a meta será implementada mesmo que não haja coordenação intertemporal entre a autoridade monetária e os demais agentes. Na visão deste autor, tal hipótese é inconsistente com a realidade brasileira.

Um pequena questão técnica decorre do fato de que $\hat{\pi}$ e as expressões das funções F e R dependem de μ. Por sua vez, esse parâmetro depende do grau de indexação a. Assim sendo, (14) implica que c_1 depende de a. Por outro lado, a análise desenvolvida à frente requer que a desigualdade $C < c_1$ se verifique para todo a. Estabelece-se abaixo que existe um número positivo c_3 tal que se $C < c_3$, então a desigualdade $C < c_1$ é respeitada seja qual for o valor de a.

Lema 2 *Existe um número $c_3 > 0$ com a propriedade que $c_3 \leq c_1$ para todo $a \in [0, 1)$.*

Defina as estratégias $\hat{\rho}$ e $\hat{\sigma}$ de acordo com $\hat{\rho}_t(h^{t-1}) = \hat{\pi}$ e $\hat{\sigma}_t(h^{t-1}, \pi_t^e) = R(\pi_t^e)$ para todo h^{t-1}. O lema abaixo formaliza, para o presente contexto, um bem conhecido fato da literatura de jogos repetidos. Mais especificamente, o resultado do jogo base se constitui em um resultado do jogo repetido.

Lema 3 *Suponha que $C < c_3$. O par $(\hat{\rho}, \hat{\sigma})$ é um equilíbrio do jogo repetido e o correspondente resultado $\{\pi_t\}_{t=0}^{\infty}$ é tal que $\pi_t^e = \pi_t = \hat{\pi}$ para todo t.*

Considere a desigualdade

$$\sum_{s=t}^{\infty} \delta_b^{s-t} G(\pi^*, \pi^*) \geq G(\pi^*, R(\pi^*)) + \sum_{s=t+1}^{\infty} \delta_b^{s-t} G(\hat{\pi}, \hat{\pi}). \tag{19}$$

[8] Ver citações na nota 4 deste texto.

Esse tipo de condição é bastante comum na literatura de jogos repetidos. A expressão do lado esquerdo corresponde ao *payoff* do jogador b se ele e o agente p coordenarem as suas ações de forma que $\pi_s^e = \pi_s = \pi^*$ em t e todas as datas subsequentes. Com relação ao lado direito, a parcela $G(\pi^*, R(\pi^*))$ é igual ao *payoff*, na data t, que b desfrutará se ele optar por desviar de π^*; o somatório corresponde ao *payoff* que esse jogador desfrutará se ele e p coordenarem no equilíbrio do jogo base em $t+1$ e todas as datas posteriores. Enquanto essa desigualdade for satisfeita, não existe um incentivo para que o banco central desvie da sequência Π^*. De fato, é possível mostrar que (19) é uma condição necessária e suficiente para que a meta π^* seja implementada em todas as datas.

Lema 4 *Suponha que $C < c_3$. A sequência Π^* é um resultado do jogo repetido se, e somente se, a condição (19) se verifica para toda data t.*

5 O papel da indexação

Analisa-se nesta seção a forma pela qual a indexação afeta a implementação das metas de inflação no jogo repetido. Em sua primeira subseção, estabelecem-se alguns resultados teóricos. Mostra-se que o valor do grau de indexação a desempenha um importante papel para determinar se a desigualdade (19) é ou não respeitada; desta forma, a possibilidade de Π^* ser ou não um resultado de equilíbrio depende do valor assumido por a. Na subseção seguinte são discutidas as implicações dos resultados em questão para a política macroeconômica. Argumenta-se que a indexação atua como um substituto, mesmo que imperfeito, para instituições sólidas.

5.1 Resultados teóricos

Primeiramente, observe que a condição (19) é equivalente à desigualdade

$$\frac{C}{1-\delta_b} \geq \left[F(\pi^*, R(\pi^*)) - F(\pi^*, \pi^*)\right] - \frac{\delta_b}{1-\delta_b}\left[F(\pi^*, \pi^*) - F(\hat{\pi}, \hat{\pi})\right]. \tag{20}$$

Logo, o problema de estabelecer se Π^* é ou não um resultado de equilíbrio se resume a verificar se a essa desigualdade é ou não satisfeita.

Denote por Z o lado direito de (20); evidentemente, Z é uma função de a, δ_b e dos demais parâmetros do modelo. Faça $\delta_b \to 1^-$. Como $F(\pi^*, \pi^*) - F(\hat{\pi}, \hat{\pi}) > 0$, $Z \to -\infty$; adicionalmente, o lado esquerdo da desigualdade diverge para ∞. Desta forma, a condição em questão será respeitada para δ_b suficientemente próximo de 1. Vale ressaltar que isso é verdade mesmo que C seja igual a 0. Assim sendo, em consonância com bem-conhecidos resultados da literatura de jogos repetidos, é possível implementar Π^* se o banco central for suficientemente paciente (mesmo que a penalidade C seja nula).

Considere agora exercício de política econômica descrito a seguir. Suponha que o governo de uma dada nação deseja que daqui em diante a taxa de inflação no país seja igual a π^*. Contudo, os parâmetros da economia são tais que

$$0 < [F(\pi^*, R(\pi^*)) - F(\pi^*, \pi^*)] - \frac{\delta_b}{1-\delta_b}[F(\pi^*, \pi^*) - F(\hat{\pi}, \hat{\pi})].$$

Desta forma, não há como atingir o objetivo desejado. Evidentemente, uma elevação do valor de δ_b poderia resolver o problema; todavia, esse parâmetro não é uma variável de política econômica. Uma possível solução consiste em implementar um sistema de metas de inflação no qual a penalidade C seja suficientemente alta para que a desigualdade (20) seja satisfeita.

O exercício do parágrafo anterior fornece um contexto para a Proposição 2, principal resultado deste artigo e que é apresentada imediatamente abaixo. Ela deve ser interpretada tendo em mente a situação de um país que, a exemplo do Brasil, deseja atingir taxas de inflação relativamente modestas. Contudo, os parâmetros da sua economia são tais que a consecução de tal objetivo requer a adoção de um sistema como o de metas de inflação.

Proposição 2 *Suponha que $C < c_3$. Assim sendo, existem valores a_1 e a_2 pertencentes ao intervalo $[0, 1)$ com as seguintes propriedades: (i) se $a \in [a_1, 1)$, então a sequência Π^* é um resultado do jogo repetido; (ii) se $a \in [0, a_2)$, então a sequência Π^* não é um resultado do jogo repetido.*

É possível utilizar uma abordagem tradicionalmente adotada na literatura de jogos repetidos para interpretar a Proposição 2. Inicialmente, observe que as condições (19) e (20) são equivalentes à

$$\frac{F(\pi^*, \pi^*)}{1-\delta_b} \geq [F(\pi^*, R(\pi^*)) - C] + \frac{\delta_b}{1-\delta_b}[F(\hat{\pi}, \hat{\pi}) - C].$$

O lado esquerdo dessa desigualdade não depende de a. Por outro lado, $F(\pi^e, \pi^*) \leq 0$ e $\lim_{a \to 1^-} F(\hat{\pi}, \hat{\pi}) = -\infty$. Desta forma, seja qual for o valor de δ_b, o seu lado esquerdo torna-se infinitamente negativo à medida que a se aproxima de 1. Por outro lado, a implementação de um dado resultado através da utilização de estratégias do tipo *trigger* que especificam reversão para o equilíbrio do jogo base envolve um mecanismo de punição para um jogador que desvie do resultado a ser implementado. Sob o ponto de vista de cada jogador, a utilização de estratégias tipo *trigger* pelos demais jogadores corresponde a promessa crível de que ele será punido pelos demais agentes com a reversão para o equilíbrio do jogo base. Evidentemente, quando menor for o *payoff* no equilíbrio do jogo base, mais propenso cada jogador estará em seguir o curso de ação que evita a punição. Tal mecanismo é a força motriz subjacente à Proposição 2. À medida que o grau de indexação a cresce, o *payoff* $F(\hat{\pi}, \hat{\pi})$ do banco central no equilíbrio do jogo base se torna menor. Ou seja, um maior valor para a implica uma punição mais forte para o banco central caso ele desvie da sequência Π^*. Esse é motivo pelo qual a indexação contribui para a implementação da meta π^* no jogo repetido. De forma similar, se a for muito pequeno, então a punição não será forte o suficiente para fazer com que o banco central não desvie de Π^*.

É um exercício simples mostrar que $a_2 \leq a_1$. Suponha que essa desigualdade se verifica na sua forma estrita (ou seja, $a_2 < a_1$). Em tal contexto, se $a \in [a_2, a_1)$, então a Proposição 2 nada diz sobre a questão de Π^* ser ou não um resultado de equilíbrio. Assuma agora que a_1 e a_2 assumem um valor comum, o qual é denotado por a_3. Nesse caso, a Proposição 2 se torna muito mais precisa, pois a desiguldade $a \geq a_3$ será uma condição necessária e suficiente para que Π^* seja um resultado do jogo repetido. Dito isto, é natural que se indague sob que condições a_1 e a_2 serão iguais. Isso ocorrerá sempre que a desigualdade

$$\delta_b \geq \frac{1}{2 + \frac{1}{\eta^2 k}} \tag{21}$$

for respeitada. Vale ressaltar que se $\delta_b \geq 1/2$, então (21) é satisfeita.[9]

Proposição 3 *Suponha que as desigualdades $C < c_3$ e (21) são satisfeitas. Assim sendo, existe um valor $a_3 \in [0, 1)$ tal que a sequência Π^* é um resultado do jogo repetido se, e somente se, $a \in [a_3, 1)$.*

O mecanismo por trás desse resultado é de fácil compreensão. O termo $F(\pi^*, R(\pi^*))$ é estritamente crescente em a. A razão para tanto decorre da igualdade (4). Quanto maior for o valor de μ, maior será o crescimento do produto gerado por uma elevação na taxa de inflação. Como μ é uma função estritamente crescente de a, então o ganho do banco central em desviar da sequência Π^* é tão maior quanto maior for o valor de a. Por outro lado, o valor de $F(\hat{\pi}, \hat{\pi})$ diminui quando a cresce. Isso se deve aos fatos de $\hat{\pi}$ ser estritamente crescente em a e $F(\pi, \pi)$ ser estritamente decrescente em π. Se (21) for satisfeita, então o segundo efeito é mais forte que o primeiro e, consequentemente, o lado direito de (19) é uma função estritamente decrescente do grau de indexação a. Assim sendo, se a_3 é o menor valor de a para o qual (19) é satisfeita, então essa desigualdade será satisfeita para todo $a \geq a_3$ e desrespeitada para todo $a < a_3$.

[9] Tendo em vista que no contexto de modelos de equilíbrio geral dinâmicos usualmente se estima que o fator intertemporal de desconto β dos consumidores excede 0,9, alguém pode se sentir tentado a assumir que a condição (21) é necessariamente verdade. Contudo, a questão não é tão simples. Não necessariamente o valor de δ_b deve ser próximo ao de β. No caso específico do Brasil, possivelmente isso não ocorre. A razão para tanto é simples. Se o valor de δ_b fosse próximo de 1, então muito provavelmente a desigualdade (20) seria satisfeita mesmo que C fosse igual a zero. Logo, não teria havido necessidade de implementar um sistema de metas de inflação.

5.2 Implicações para a política econômica

Estuda-se neste parte do ensaio as implicações, referentes à política macroeconômica, dos resultados apresentados na subseção anterior. Tendo em vista que a Proposição 3 é essencialmente um refinamento daquela que a antecedeu, a discussão será restrita à Proposição 2.

Antes de iniciar a tarefa a ser executada nesta subseção, há que se fazer uma ressalva. Conforme previamente mencionado, é um exercício simples mostrar que $a_2 \leq a_1$. Contudo, exceto por essa desigualdade, a proposição em questão é muda sobre o valores assumidos por a_1 e a_2; em particular, ela não exclui a possibilidade de que ambos sejam nulos. A análise que se segue implicitamente assume que a_1 e a_2 são positivos. Encerrada tal análise, serão tecidas considerações de cunho teórico e empírico sobre a possibilidade de esses parâmetros serem iguais a zero.

Mais uma vez, considere a situação de um governo que deseja implementar um sistema de metas de inflação. Fosse esse governo um ente todo-poderoso, então lhe seria suficiente estabelecer um valor suficientemente elevado para a penalidade C de forma que desigualdade (20) fosse satisfeita. Contudo, os governos do mundo real são entidades com poderes limitados. Assim sendo, a sua capacidade de penalizar agentes, inclusive os gestores do banco central, não é irrestrita. No caso específico do parâmetro C, é razoável assumir que o seu valor depende da solidez institucional do país. Por exemplo, em uma nação na qual o legislativo tem poderes para tanto e os congressistas efetivamente atuam de forma a monitorar a atuação do ministro da fazenda e do presidente do banco central, o incentivo para que os formuladores e gestores da política macroeconômica implementem a meta de inflação tende a ser maior do que em uma sociedade na qual esses agentes somente se reportam ao chefe do executivo.

Dito isto, assuma que o governo estabeleceu o sistema de metas e, consequemente, há uma penalidade C implícita nos mecanismos de execução, controle e monitoramento da política econômica. O sucesso ou fracasso do novo regime de política econômica dependerá do parâmetro a. Se essa variável for alta o suficiente de forma que $a \geq a_1$, então Π^* será um resultado de equilíbrio. Contudo, se a for menor que a_2, então o sistema de metas fracassará.

Considere agora o caso de um país que já adotou o regime de metas e vem tendo sucesso em implementar a sequência Π^*. Logo, pode-se inferir que $a \geq a_1$. Assuma agora que o seu governo realize reformas que levem a uma redução do grau de indexação. Seja $\tilde{a}$ o novo valor desse parâmetro. Se $\tilde{a} < a_2$, então Π^* deixará de ser um resultado de equilíbrio. Isto é, uma redução do grau de indexação pode tornar o sistema de metas de inflação ineficaz.

Os exercícios acima ilustram um ponto importante: a indexação funciona como um substituto, mesmo que imperfeito, para um baixo valor de C. Se o leitor estiver disposto a atribuir esse baixo valor a uma relativa debilidade das instituições, ele pode então concluir que a indexação atua de forma a compensar tal fraqueza. Ou seja, se uma nação possui instituições fracas, então a indexação pode contribuir para o sucesso do sistema de metas de inflação.

Conforme mencionado no segundo parágrafo desta subseção, a discussão acima pressupõe que $a_1 > 0$ e $a_2 > 0$. Analisa-se a seguir o caso em ambos os parâmetros são iguais a zero.[10] Se isso ocorrer, então a Proposição 2 implica que Π^* é um resultado do jogo repetido seja qual for o valor de a. Assim sendo, em tal contexto não há como uma reforma que reduza o grau de indexação da economia tornar o sistema de metas de inflação ineficaz.

Tendo em vista que as implicações do parágrafo anterior são opostas àquelas previamente obtidas, é natural que se indague se é possível fazer alguma inferência sobre os valores de a_1 e a_2. Esse é um problema de natureza essencialmente empírica. Este autor desconhece a existência de algum texto que tenha abordado tal questão. Presentemente, o máximo que se pode dizer é que, antes da implementação do sistema de metas de inflação, possivelmente os parâmetros da economia brasileira eram tais que $a < a_1$.[11] Afinal de contas, se desigualdade $a \geq a_1$ se verificasse antes mesmo da introdução do regime de metas, então não haveria motivos para a implantação do mesmo. Por outro lado, o relativo sucesso desse regime sugere que presentemente os parâmetros são tais que $a \geq a_1$.

Provavelmente é necessário que se realize uma investigação empírica para que seja possível tecer considerações adicionais sobre os valores de a, a_1 e a_2. Ressalta-se que modelo utilizado neste ensaio é excessivamente simples para ser utilizado em um exercício econométrico. Por exemplo, Aragón e Portugal (2009) e Palma e Portugal (2011) buscam obter estimativas de parâmetros das preferências do Banco Central do Brasil. Em ambos os trabalhos, os modelos estimados são consideravelmente mais complexos do que o utilizado neste ensaio. Por outro lado, a adoção de um modelo mais sofisticado não é desprovida de custos, pois isso tornaria necessário refazer toda a análise teórica realizada neste texto. Dito isto, este autor acredita que a realização de uma investigação empírica é um passo importante para que se tenha uma melhor compreensão da relação entre indexação e o funcionamento do sistema de metas de inflação.

6 Formulações alternativas da Curva de Phillips

Mostra-se nesta parte do artigo que os resultados similares àqueles obtidos nas seções anteriores também podem ser derivados em um contexto no qual a Curva de Phillips seja,

[10] Estritamente falando, deveria também se estudar o que ocorre quando $a_1 > 0$ e $a_2 = 0$. Contudo, pequenas alterações nos argumentos aqui apresentados contemplam esse caso. Assim sendo, ele não será discutido explicitamente.

[11] Vale ressaltar que os valores de a_1 e a_2 dependem da penalidade C.

a exemplo do que ocorre na abordagem dita novo-keynesiana, do tipo *forward looking*. Consequentemente, as implicações para a política econômica levantadas na Subseção 5.2 também são válidas nessa classe alternativa de modelos.

No momento em que se admite que as variáveis π_t e π^e_{t+1} integram a expressão da relação de Phillips, a interação estratégica envolvendo o banco central e o setor privado necessariamente passa a ter uma natureza intertemporal. Desta maneira, não existe um jogo base cujo o resultado possa ser utilizado como ponto de partida para caracterizar o conjunto de resultados do jogo de horizonte infinito. Ainda assim, uma abordagem similar à adotada na Subseção 3.1 permite que se caracterize um primeiro equilíbrio; por sua vez, esse equilíbrio pode ser utilizado para caracterizar todos os demais.

Para facilitar a exposição, adota-se em um primeiro momento a mais simples possível variação de (3) na qual as expectativas de inflação se referem à data $t+1$. Mais especificamente, assume-se que que a relação de Phillips é dada por

$$\pi_t = \pi^e_{t+1} + (1-a)\eta(y_t - \bar{y}).$$

Assim sendo,

$$y_t = \bar{y} + \mu(\pi_t - \pi^e_{t+1}). \tag{22}$$

Considere agora a seguinte variante do jogo da Seção 4. A cada data t, o setor privado escolhe π^e_{t+1} como função da história (a qual agora deve também incluir π^e_t). Após observar a ação do setor privado, o banco central escolhe a taxa de inflação π_t. O *payoff* do setor privado é dado por (17). No tocante ao banco central, é preciso redefinir as funções F e G. De forma similar à relação (7), a primeira delas é dada por

$$F(\pi^e_{t+1}, \pi_t) = -k\pi_t^2 - [\mu(\pi_t - \pi^e_{t+1}) - \gamma\bar{y}]^2.$$

Agora, redefina G de forma que

$$G(\pi^e_{t+1}, \pi_t) = F(\pi^e_{t+1}, \pi_t) - CI(\pi_t), \tag{23}$$

onde I é a função indicadora previamente definida. Por fim, o *payoff* do jogador b é tal que

$$\sum_{s=t}^{\infty} \delta_b^{s-t} G(\pi^e_{s+1}, \pi_s).$$

É possível adaptar a abordagem utilizada na Seção 3 para construir um equilíbrio para esse jogo intertemporal. Seja S a função dada por

$$S(\pi^e_{t+1}) = \frac{\mu^2}{k+\mu^2}\pi^e_{t+1} + \frac{\mu\gamma}{k+\mu^2}\bar{y}.$$

Essa função corresponde à taxa de inflação π_t que, dado o valor de π^e_{t+1}, maximiza $F(\pi^e_{t+1}, \pi_t)$. Ela desempenha um papel similar à função R, definida em (11), e $\hat{\pi}$ é o seu único ponto fixo. É um exercício simples mostrar que, a exemplo do Lema 3, o par $(\hat{\rho}, \hat{\sigma})$ é um equilíbrio e que o correspondente resultado é $\pi^e_{t+1} = \pi_t = \hat{\pi}$ para toda data t. Adicionalmente, todos lemas e proposições posteriores são válidos no presente contexto.[12]

Suponha agora que a relação de Phillips seja dada por

$$\pi_t = \beta\pi^e_{t+1} + (1-a)\eta(y_t - \bar{y}),$$

onde $\beta \in (0,1)$ é o fator de desconto intertemporal de uma família representativa que habita uma economia na qual a relação acima se verifica. Essa igualdade pode ser interpretada como uma versão determinística, na qual o coeficiente angular depende do grau de indexação a, da Curva de Phillips em Galí (2015, p. 129). Rearrajando os termos, obtém-se

$$y_t = \bar{y} + \mu(\pi_t - \beta\pi^e_{t+1}).$$

Se β fosse igual a 1, então a última igualdade seria idêntica à (22). Desta forma, é natural que se conjecture que se o valor de β estiver suficientemente próximo de 1, então será possível reproduzir alguns dos resultados previamente obtidos. De fato, mostra-se a seguir que em tal contexto é possível obter um resultado similar à Proposição 2.

Redefina F de forma que

$$F(\pi^e_{t+1}, \pi_t) = -k\pi_t^2 - [\mu(\pi_t - \beta\pi^e_{t+1}) - \gamma\bar{y}]^2.$$

A função G satisfaz (23). Seja S o valor de π_t que maximiza F para um dado valor de π^e_{t+1}. Desta maneira,

$$S(\pi^e_{t+1}) = \frac{\mu^2}{k+\mu^2}\beta\pi^e_{t+1} + \frac{\mu\gamma}{k+\mu^2}\bar{y}.$$

Essa função tem um único ponto fixo $\tilde{\pi}$, o qual satisfaz

$$\tilde{\pi} = \frac{\mu\gamma}{k+\mu^2(1-\beta)}\bar{y}.$$

É importante destacar que $\tilde{\pi}$ é estritamente crescente em μ para $\mu < \bar{\mu}$, onde

$$\bar{\mu} = \sqrt{\frac{k}{1-\beta}},$$

e decrescente para $\mu \geq \bar{\mu}$. Por outro lado, $\hat{\pi}$ é estritamente crescente em μ e essa propriedade tem um papel importante nas demonstrações dos resultados das seções anteriores. Assim sendo, de forma a assegurar que $\tilde{\pi}$ se comporta de forma similar à $\hat{\pi}$,

[12] Vale ressaltar que é necessário reinterpretar os parâmetros c_1, c_2 e c_3. Ao invés de estarem relacionados às propriedades do equilíbrio do jogo base com metas de inflação, eles dizem respeito às propriedades do ponto fixo de S.

assume-se que $\mu < \bar{\mu}$. Tendo em vista a relação entre a e μ imposta por (5), a última desigualdade é equivalente à $a < \bar{a}$, onde

$$\bar{a} = 1 - \frac{1}{\eta}\sqrt{\frac{1-\beta}{k}}.$$

Sejam $\tilde{\rho}$ e $\tilde{\sigma}$ a estratégias nas quais o setor privado e o banco central jogam, para toda história, $\pi^e_{t+1} = \tilde{\pi}$ e $\pi_t = S(\pi^e_{t+1})$. Se C for suficientemente pequeno[13], o par $(\tilde{\rho}, \tilde{\sigma})$ é um equilíbrio e o correspondente resultado é $\pi^e_{t+1} = \pi_t = \tilde{\pi}$ para toda data t. Esse equilíbrio pode ser utilizado para suportar, por meio de estratégias do tipo *trigger*, outros resultados. Desta forma, Π^* será um resultado de equilíbrio se, e somente se,

$$\frac{C}{1-\delta_b} \geq \left[F(\pi^*, S(\pi^*)) - F(\pi^*, \pi^*)\right] - \frac{\delta_b}{1-\delta_b}\left[F(\pi^*, \pi^*) - F(\tilde{\pi}, \tilde{\pi})\right]. \qquad (24)$$

Dito isto, é possível obter uma conclusão similar à Proposição 2.

Proposição 4 *Suponha que o valor de C é suficientemente pequeno. Existe um número $\beta_0 \in (0,1)$ tal que se $\beta \geq \beta_0$, então existem valores α_1 e α_2 pertencentes ao intervalo $[0, \bar{a})$ com as seguintes propriedades: (i) se $a \in [\alpha_1, \bar{a})$, então a sequência Π^* é um resultado do jogo; (ii) se $a \in [0, \alpha_2)$, então a sequência Π^* não é um resultado do jogo.*

Tendo em vista essa última proposição, a análise realizada na Subseção 5.2 também é valida no presente contexto. Evidentemente, há que se adicionar à discussão referente aos valores dos parâmetros a questão da condição $\beta \geq \beta_0$ ser ou não consistente com a evidência empírica.

7 Considerações finais

Na visão de vários economistas brasileiros, o controle da inflação será tão mais difícil o quão mais prevalente for a indexação. Utilizou-se neste ensaio o ferramental da Teoria dos Jogos para verificar se essa visão está correta no contexto do regime de metas de inflação. De forma contrária à sabedoria convencional, verificou-se que a indexação pode contribuir para que se implemente uma meta cujo o valor seja inferior àquela taxa de inflação que prevaleceria se esse regime de política monetária não estivesse em vigor.

O resultado acima descrito foi obtido em um jogo repetido no qual o jogo base (*stage game*) é similar aqueles estudados por Kydland e Prescott (1977) e Barro e Gordon

[13] Lembre que a condição a condição $C < c_3$ foi utilizada em diversas passagens da Seção 4. Aqui ela é substituída pelo pressuposto de que o valor de C é suficientemente pequeno. Ao se adotar esse hipótese mais vaga, elimina-se a necessidade de se executar a longa análise dos parâmetros c_1, c_2 e c_3 realizada na Subseção 3.2 e no Lema 2.

(1983a e 1983b). O jogo aqui considerado difere do daqueles autores em dois aspectos. Primeiro, o *tradeoff* subjacente à Curva de Phillips entre inflação e hiato do produto depende do grau de indexação da economia; segundo, o banco central sofre penalidade (i.e., uma redução no seu *payoff*) caso ele falhe em implementar a meta de inflação.

A intuição por trás do resultado de que a indexação pode contribuir para o sucesso do sistema de metas de inflação é relativamente simples. Conforme é bem conhecido da literatura de jogos repetidos, a ameaça de que haverá um desvio para o equilíbrio do jogo base pode ser utilizado para induzir os jogadores a se comportarem de maneira cooperativa, viabilizando-se assim a implementação no jogo repetido de resultados superiores ao do jogo base. Exatamente esse mecanismo é utilizado para implementar a meta de inflação no jogo repetido. Contudo, a taxa de inflação no equilíbrio do jogo base é uma função crescente do grau de indexação da economia. Adicionalmente, o *payoff* do banco central decresce à medida que a inflação cresce. Assim sendo, o valor do *payoff* da autoridade monetária no ponto de equilíbrio se relaciona de forma decrescente com o grau de indexação. Logo, quanto menos indexada for a economia, menor será o incentivo do banco central para atuar de forma que a economia atinja um resultado distinto do equilíbrio do jogo base.

A sabedoria convencional referente à indexação tem as suas raízes no longo debate que antecedeu o Plano Real. Contudo, a atual situação da economia brasileira é completamente distinta daquela que prevalecia antes da estabilização. Atualmente, as taxas de inflação são muito menores e a política monetária é regida pelo sistema de metas de inflação. Assim sendo, não necessariamente a presente relação entre inflação e indexação é similar àquela que vigorou até julho de 1994. Novos estudos, teóricos e empíricos, são necessários para que possa ter uma boa compreensão dessa importante questão.

Referências bibliográficas

Aragón, E.K.S.B e Portugal, M.S. Central Bank preferences and monetary rules under the inflation targeting regime in Brazil. *Brazilian Review of Econometrics* v. 29, n. 1, p. 79–109, 2009.

Barro, R. e Gordon, D. A positive theory of monetary policy in a natural rate model. *Journal of Political Economy* v. 91, n. 4, p. 589–610, 1983a.

Barro, R. e Gordon, D. Rules, discretion and reputation in a model of monetary policy. *Journal of Monetary Economics* v. 12, n. 1, p. 101–121, 1983b.

Bernanke, B.S.; Laubach, T.; Mishkin, F.S. e Posen, A.S. *Inflation targeting: lessons from the international experience.* Princeton: Princeton University Press, 1999.

Bresser-Pereira, L.C. Onde foi que erramos? Quando e por que a economia saiu da rota. *Folha de São Paulo*, São Paulo, 27 mar. 2016.

Drazen, A. *Political economy in macroeconomics.* Princeton: Princeton University Press, 2000.

Frankel, A. e Kartik, N. What kind of central bank competence?. *Theoretical Economics*, no prelo, 2018.

Griebeler, M.C. The naive central banker. *Revista Brasileira de Economia* v. 69, n. 3, p. 355–372, 2015.

Galí, J. *Monetary policy, inflation, and the business cycle.* Princeton: Princeton University Press, 2015.

Gibbons, R. *Game theory for applied economists.* Princeton: Princeton University Press, 1992.

Kydland, F. e Prescott, E. Rules rather than discretion: the inconsistency of optimal plans. *Journal of Political Economy* v. 85, n. 3, p. 473–492, 1977.

Marconi, N. O papel dos preços macroeconômicos na crise e na recuperação. *Estudos Avançados* v. 31, n. 89, p. 97–109. 2017.

Modenesi, A.M. *Regimes monetários: teoria e a experiência do Real.* Barueri: Manole, 2005.

Obstfeld, M. The logic of currency crises. *Cahiers Économiques et Monétaires* v. 43, p. 189–213, 1994.

Oreiro, J.L. Muito além do tripé. *Valor Econômico*, São Paulo, 10 jan. 2014.

Palma, A.A. e Portugal, M.S. Preferences of the Central Bank of Brazil under the inflation targeting regime: commitment vs. discretion. *Revista Brasileira de Economia* v. 65, n. 4, p. 347–358, 2011.

Svensson, L.E.O. Inflation Targeting. In: Friedman, B.M. e Woodford, M. *Handbook of Monetary Economics, Volume 3B.* Amsterdã: North-Holland, 2011.

Walsh, C.E. *Monetary theory and policy.* 4ª edição. Cambridge: MIT Press, 2017.

Walsh, C.E. Inflation targeting: what have we learned? *International Finance* v. 12, n. 2, p. 195–233, 2009.

Apêndice: demonstrações

Lema 1. Defina a função $m(\pi^e)$ de forma que $m(\pi^e) = F(\pi^e, R(\pi^e)) - F(\pi^e, \pi^*)$. Observe que $m(\hat{\pi}) = c_2$, $m(\pi^*) = c_1$ e

$$c_2 - c_1 = \int_{\pi^*}^{\hat{\pi}} m'(\pi^e) d\pi^e. \tag{25}$$

Adicionalmente,

$$m'(\pi^e) = F_1(\pi^e, R(\pi^e)) + F_2(\pi^e, R(\pi^e))R'(\pi^e) - F_1(\pi^e, \pi^*).$$

Utilize (10) para mostrar que $m'(\pi^e) = F_1(\pi^e, R(\pi^e)) - F_1(\pi^e, \pi^*)$. Tendo em vista que $F_1(\pi^e, \pi) = 2\mu[\mu(\pi - \pi^e) - \gamma\bar{y}]$, conclui-se que $m'(\pi^e) = 2\mu^2[R(\pi^e) - \pi^*]$. Combine essa igualdade com (25). Esse procedimento estabelece que

$$c_2 - c_1 = 2\mu^2 \int_{\pi^*}^{\hat{\pi}} [R(\pi^e) - \pi^*] d\pi^e. \tag{26}$$

Por outro lado, (11) e (12) implicam que

$$R(\pi^*) - \pi^* = \frac{k}{k + \mu^2}(\hat{\pi} - \pi^*) > 0. \tag{27}$$

Como R é estritamente crescente, conclui-se que $R(\pi^e) - \pi^* > 0$ para todo $\pi^e \geq \pi^*$. Logo, o lado direito de (26) é positivo. Desta forma, $c_2 > c_1$. $\square$

Proposição 1. Há três casos a serem considerados: (i) $C < c_1$, (ii) $C > c_2$ e (iii) $C \in [c_1, c_2]$. Inicia-se a demonstração pelo caso (i). Como $C < c_1$, $C < c_2$. Combine essa desigualdade com (15) para concluir que $F(\hat{\pi}, \pi^*) < F(\hat{\pi}, R(\hat{\pi})) - C$. Assim sendo, se setor privado jogar $\pi^e = \hat{\pi}$, então a ação ótima para o banco central consiste em jogar $\pi = R(\hat{\pi}) = \hat{\pi}$. Tendo em vista que $\pi^e = \pi$, o *payoff* do setor privado será igual a zero. Assim sendo, $\pi^e = \pi = \hat{\pi}$ é um resultado de equilíbrio.

Para concluir a análise do caso (i), é preciso mostrar que não existe outro resultado. Suponha que o setor privado jogue $\pi^e = \pi^*$. Combine (14) com a desigualdade $C < c_1$ para concluir que $F(\pi^*, \pi^*) < F(\pi^*, R(\pi^*)) - C$. Como $R(\pi^*) \neq \pi^*$, pode se concluir que o banco central não jogará $\pi = \pi^*$. Assim sendo, π^e será diferente de π, o que faz com que o *payoff* do setor privado seja negativo. Assim sendo, ação $\pi^e = \hat{\pi}$ domina estritamente a ação $\pi^e = \pi^*$. Logo, não há um resultado no qual $\pi^e = \pi^*$. Suponha agora que o setor privado implemente uma ação genérica π' distinta de ambas π^* e $\hat{\pi}$. Se a resposta ótima do banco central for $\pi = \pi^*$, então o *payoff* do setor privado será negativo; logo, π' não pode ser uma escolha ótima para o jogador p. Se a resposta ótima do banco central for diferente de π^*, então ela será igual a $R(\pi')$; como $\pi' \neq \hat{\pi}$ e $\hat{\pi}$ é o único ponto fixo de R, $R(\pi') \neq \pi'$. Assim, conclui-se novamente que o *payoff* do setor privado será negativo; mais uma vez, π' não pode ser uma escolha ótima para o jogador p. Desta forma, não existe um resultado no qual $\pi^e = \pi'$.

Considere agora o caso (ii). Como $C > c_2 > c_1$, $F(\pi^*, \pi^*) > F(\pi^*, R(\pi^*)) - C$. Assim sendo, se p jogar $\pi^e = \pi^*$, b jogará $\pi = \pi^*$. Desta forma, $\pi^e = \pi = \pi^*$ é um resultado de equilíbrio. Resta mostrar que esse resultado é único. Suponha que p jogue $\pi^e = \hat{\pi}$. Como $C > c_2$, $F(\hat{\pi}, \pi^*) > F(\hat{\pi}, R(\hat{\pi})) - C$. Logo, b jogará $\pi = \pi^*$. Assim sendo, $\pi^e = \hat{\pi}$ não é uma escolha ótima para o setor privado. Ademais, se p jogar $\pi^e = \pi' \notin \{\pi^*, \hat{\pi}\}$, então banco central jogará $\pi = \pi^*$ ou $\pi = R(\pi')$. Mais uma vez, π' não é uma ação ótima para p.

Por fim, considere o caso (iii). Como $c_1 \leq C$, $F(\pi^*, \pi^*) \geq F(\pi^*, R(\pi^*)) - C$. Assim sendo, $\pi^e = \pi = \pi^*$ é um resultado do jogo. Adicionalmente, $C \leq c_2$ implica que $F(\hat{\pi}, \pi^*) \leq F(\hat{\pi}, R(\hat{\pi})) - C$. Desta forma, $\pi^e = \pi = \hat{\pi}$ também é um resultado. Para estabelecer que não há outros resultados, considere mais uma vez o que ocorre se p implementar uma ação $\pi' \notin \{\pi^*, \hat{\pi}\}$. O raciocínio utilizado no final do parágrafo anterior estabelece que π' não é uma escolha ótima para o setor privado. $\square$

Lema 2. O primeiro passo da demonstração consiste em provar que c_1 é uma função estritamente crescente de a. Tendo em vista a igualdade (5), é suficiente mostrar que c_1 é estritamente crescente em μ. Denote a derivada da expressão de $F(\pi^e, \pi)$ com respeito à μ por F_μ. Atribua a R_μ um significado equivalente. Diferencie (14) com respeito à μ para concluir que

$$\frac{\partial c_1}{\partial \mu} = F_\mu(\pi^*, R(\pi^*)) + F_2(\pi^*, R(\pi^*))R_\mu(\pi^*) - F_\mu(\pi^*, \pi^*).$$

Observe que (27) estabelece que $R(\pi^*) - \pi^* > 0$. Ademais, (11) implica que

$$(k + \mu^2)R(\pi^*) = \mu^2\pi^* + \mu\gamma\bar{y} \Rightarrow \mu[R(\pi^*) - \pi^*] - \gamma\bar{y} = -\frac{k}{\mu}R(\pi^*) < 0.$$

Como

$$F_\mu(\pi^*, R(\pi^*)) = -2[R(\pi^*) - \pi^*]\{\mu[R(\pi^*) - \pi^*] - \gamma\bar{y}\},$$

conclui-se que $F_\mu(\pi^*, R(\pi^*)) > 0$. É trivial mostrar que $F_\mu(\pi^*, \pi^*) = 0$. Adicionalmente, (10) implica que $F_2(\pi^*, R(\pi^*)) = 0$. Assim sendo, $\partial c_1/\partial\mu > 0$.

Para enfatizar que c_1 depende de a, escreva $c_1(a)$. Como c_1 é estritamente crescente em a e $a \geq 0$, pode se concluir que $c_1(0) \leq c_1(a)$ para todo a. Defina $c_3 = c_1(0)$. Claramente, $c_3 \leq c_1(a)$ para todo $a \in [0, 1]$. Por fim, como $c_1(0)$ é positivo, o mesmo vale para c_3. $\square$

Lema 3. Se o setor privado implementa a estratégia $\hat{\rho}$, então $\hat{\sigma}$ é a melhor estratégia para o banco central; similarmente, se o banco central joga $\hat{\sigma}$, então $\hat{\rho}$ é a estratégia ótima para o setor privado. Adicionalmente, $\hat{\sigma}_t(h^{t-1}, \hat{\pi}) = R(\hat{\pi}) = \hat{\pi}$; desta forma, o resultado induzido por $(\hat{\rho}, \hat{\sigma})$ é tal que $\pi_t^e = \pi_t = \hat{\pi}$ para todo t. $\square$

Lema 4. Considere inicialmente a parte "se". Suponha que a sequência Π^* satisfaz (19). É preciso construir estratégias que implementem Π^* como resultado do jogo. Seguindo o padrão usual da literatura, são construídas estratégias do tipo *trigger* que especificam reversão para $\hat{\rho}$ e $\hat{\sigma}$ caso ocorra algum desvio de Π^*. Formalmente, seja h_*^t a história na qual $\pi_s^e = \pi_s = \pi^*$ para todo $s \leq t$. Defina a estratégia ρ^* de forma que $\rho^*(h^{t-1}) = \pi^*$ se $h^{t-1} = h_*^{t-1}$ e $\rho^*(h^{t-1}) = \hat{\pi}$ se $h^{t-1} \neq h_*^{t-1}$. Similarmente, σ^* satisfaz $\sigma^*(h^{t-1}, \pi_t^e) = \pi^*$ se $(h^{t-1}, \pi_t^e) = (h_*^{t-1}, \pi^*)$ e $\sigma^*(h^{t-1}, \pi_t^e) = R(\pi_t^e)$ se $(h^{t-1}, \pi_t^e) \neq (h_*^{t-1}, \pi^*)$. Claramente, o par (ρ^*, σ^*) implementa a sequência Π^*. Resta mostrar que (ρ^*, σ^*) é um equilíbrio. Suponha que o setor privado adota a estratégia ρ^*. Seja h^{t-1} uma história qualquer. Se $h^{t-1} = h_*^{t-1}$, então (19) estabelece que implementar π^* é uma ação ótima para o banco central; se $h^{t-1} \neq h_*^{t-1}$, então o melhor que o banco central pode fazer é jogar $R(\pi_t^e)$. Logo, σ^* é uma melhor resposta para ρ^*. Suponha agora que o banco central joga σ^*. Em tal contexto, ao jogar ρ^* o setor privado fará com que $\pi_t^e = \pi_t$ seja lá qual for a história h^{t-1}. Desta forma, ρ^* é uma melhor resposta para σ^*.

Com relação à parte "somente se", é suficiente mostrar que se (19) não é satisfeita para alguma data t, então Π^* não é um resultado. Seja $\bar{s}$ a primeira data na qual a condição em questão é violada. Considere a situação do banco central. Esse jogador pode reverter para a estratégia $\hat{\sigma}$. Se isso acontecer, a melhor resposta para o setor consistirá em jogar $\hat{\rho}$. Isso fará com que $\pi_{\bar{s}} = R(\pi^*)$ e $\pi_t = \hat{\pi}$ para todo $t \geq \bar{s}+1$. Como a desigualdade (19) não se verifica, a reversão para $\hat{\sigma}$ faz com que o banco central tenha um *payoff* maior do aquele que ele desfrutaria se implementasse π^* na data $\bar{s}$. Logo, Π^* não pode ser um resultado de equilíbrio. $\square$

Proposição 2. Inicialmente, observe que o problema de se estabelecer que Π^* é ou não um resultado de equilíbrio se resume a verificar se a desigualdade (20) é ou não satisfeita. Lembre que Z foi previamente definido como sendo igual ao lado direito de desigualdade em questão. Considere o item (i). O primeiro passo da prova consiste em mostrar que se $a \to 1^-$, então $Z \to -\infty$. Rearranjando os termos, conclui-se que

$$Z = F(\pi^*, R(\pi^*)) + \frac{\delta_b}{1-\delta_b} F(\hat{\pi}, \hat{\pi}) - \frac{1}{1-\delta_b} F(\pi^*, \pi^*).$$

Utilize (7) para concluir que $F(\pi, \pi) = -[k\pi^2 + (\gamma\bar{y})^2]$. Assim sendo,

$$\begin{aligned}
Z &= F(\pi^*, R(\pi^*)) - \frac{\delta_b}{1-\delta_b}[k\hat{\pi}^2 + (\gamma\bar{y})^2] + \frac{1}{1-\delta_b}[k(\pi^*)^2 + (\gamma\bar{y})^2] \Rightarrow \\
Z &= F(\pi^*, R(\pi^*)) + \frac{k(\pi^*)^2}{1-\delta_b} + (\gamma\bar{y})^2 - \frac{\delta_b}{1-\delta_b} k\hat{\pi}^2 \Rightarrow \\
Z &\leq \frac{k(\pi^*)^2}{1-\delta_b} + (\gamma\bar{y})^2 - \frac{\delta_b}{1-\delta_b} k\hat{\pi}^2, \qquad (28)
\end{aligned}$$

onde a última desigualdade decorre do fato de que $F(\pi^e, \pi) \leq 0$. Como (13) implica que $\hat{\pi} \to \infty$ à medida que $a \to 1^-$, o lado direito de (28) diverge para $-\infty$ quando $a \to 1^-$. Assim sendo, $\lim_{a \to 1^-} Z(a) = -\infty$. Logo, para todo C existe um número $a_1 \in [0, 1)$ tal que se $a \geq a_1$, então $C \geq (1 - \delta_b)Z(a)$. Desta forma, se $a \geq a_1$, então a condição (20) é satisfeita.

Considere agora o item (ii). Seja $A' \subseteq [0, 1)$ o conjunto de todos os números a' que satisfazem a desigualdade $C \geq (1 - \delta_b)Z(a')$. Como A' é limitado, esse conjunto possui um ínfimo. Defina $a_2 = \inf A'$. Suponha que $a_2 > 0$. Seja a qualquer elemento de $[0, 1)$ tal que $a < a_2$; logo, $a \notin A'$. Assim sendo, $C < (1 - \delta_b)Z(a)$. Essa última desigualdade implica que a condição (20) não é satisfeita. Se $a_2 = 0$, então $[0, a_2) = \varnothing$ e, por tal motivo, não há o que mostrar. □

Proposição 3. Esta prova é divida em três passos: (i) mostra-se que (21) implica que Z é uma função estritamente decrescente de a; (ii) caracteriza-se o valor a_3; (iii) utilizam-se os dois passos anteriores para mostrar que a_3 possui as propriedades desejadas.

No tocante ao passo (i), (5) implica que a e μ se relacionam de forma estritamente crescente. Logo, é suficiente mostrar que $\partial Z/\partial \mu < 0$. Observe que

$$\begin{aligned}\frac{\partial Z}{\partial \mu} &= [F_\mu(\pi^*, R(\pi^*)) + F_2(\pi^*, R(\pi^*))R_\mu(\pi^*) - F_\mu(\pi^*, \pi^*)] - \\ &\quad \frac{\delta_b}{1-\delta_b}\left[F_\mu(\pi^*, \pi^*) - \{F_\mu(\hat{\pi}, \hat{\pi}) + [F_1(\hat{\pi}, \hat{\pi}) + F_2(\hat{\pi}, \hat{\pi})]\, \hat{\pi}_\mu\}\right],\end{aligned}$$

onde $\hat{\pi}_\mu$ denota a derivada de $\hat{\pi}$ com respeito a μ. A condição de primeira ordem (10) implica que $F_2(\pi^*, R(\pi^*)) = 0$ e $F_2(\hat{\pi}, \hat{\pi}) = 0$, pois $\hat{\pi} = R(\hat{\pi})$. Adicionalmente, $F_\mu(\pi^*, \pi^*) = 0$, $F_\mu(\hat{\pi}, \hat{\pi}) = 0$ e $F_1(\hat{\pi}, \hat{\pi}) + F_2(\hat{\pi}, \hat{\pi}) = -2k\hat{\pi}$. Assim sendo,

$$\frac{\partial Z}{\partial \mu} = F_\mu(\pi^*, R(\pi^*)) - \frac{\delta_b}{1-\delta_b}(2k\hat{\pi})\hat{\pi}_\mu.$$

Além do mais, $\hat{\pi} = \mu(\gamma/k)\bar{y}$, $\hat{\pi}_\mu = (\gamma/k)\bar{y}$ e

$$F_\mu(\pi^*, R(\pi^*)) = -2[R(\pi^*) - \pi^*]\{\mu[R(\pi^*) - \pi^*] - \gamma\bar{y}\}.$$

Combine as quatro últimas igualdades e efetue alguns algebrismos. Esse procedimento estabelece que

$$\frac{\partial Z}{\partial \mu} = -2\mu[R(\pi^*) - \pi^*]^2 + 2\gamma\bar{y}\left[R(\pi^*) - \pi^* - \frac{\delta_b}{1-\delta_b}\hat{\pi}\right].$$

Juntas, (27) e a última igualdade implicam que

$$\frac{\partial Z}{\partial \mu} = -2\mu[R(\pi^*) - \pi^*]^2 + 2\gamma\bar{y}\left[\left(\frac{k}{k+\mu^2} - \frac{\delta_b}{1-\delta_b}\right)\hat{\pi} - \frac{k}{k+\mu^2}\pi^*\right]. \tag{29}$$

Por outro lado, (21) implica que

$$\delta_b \geq \frac{1}{2+\frac{1}{(1-a)^2\eta^2 k}} = \frac{1}{2+\frac{\mu^2}{k}} = \frac{k}{2k+\mu^2} \Rightarrow \frac{\delta_b}{1-\delta_b} \geq \frac{k}{k+\mu^2}.$$

Combine a última desigualdade com (29) para concluir que $\partial Z/\partial \mu < 0$.

Com relação ao passo (ii), seja C uma penalidade genérica. Se $C \geq (1-\delta_b)Z(0)$, então faça $a_3 = 0$. Suponha que agora que $C < (1-\delta_b)Z(0)$. Como $\lim_{a\to 1^-} Z(a) = -\infty$, existe um grau de indexação $a_0' < 1$ tal que $C > (1-\delta_b)Z(a_0')$. Tendo em vista a continuidade de $Z(a)$, existe um número $a_1' \in (0, a_0')$ tal que $C = (1-\delta_b)Z(a_1')$. Faça $a_3 = a_1'$.

Conclui-se a prova com o passo (iii). Considere a parte "se" da Proposição 3. Se $a \geq a_3$, então utilize o fato de que Z é estritamente decrescente em a para concluir que $Z(a_3) \geq Z(a)$. Como $C \geq (1-\delta_b)Z(a_3)$, $C \geq (1-\delta_b)Z(a)$. Logo, Π^* é um resultado do jogo repetido. Com relação à parte "somente se", suponha que inicialmente $a_3 = 0$; claramente, $a \geq a_3$. Se $a_3 > 0$, então $C = (1-\delta_b)Z(a_3)$. Agora, utilize o fato de Π^* ser um resultado para concluir que $C \geq (1-\delta_b)Z(a)$. Assim sendo, $Z(a_3) \geq Z(a)$. Tendo em vista que Z é estritamente decrescente em a, conclui-se que $a \geq a_3$. □

Proposição 4. De forma similar à Proposição 2, verificar se Π^* é ou não um resultado de equilíbrio é equivalente a checar se (24) é ou não satisfeita. O primeiro passo da prova consiste em identificar o número β_0. Denote o lado direito de (24) por $z(\mu,\beta)$; logo,

$$z(\mu,\beta) = F(\pi^*, S(\pi^*)) + \frac{\delta_b}{1-\delta_b}F(\tilde{\pi},\tilde{\pi}) - \frac{1}{1-\delta_b}F(\pi^*,\pi^*).$$

Como $F(\pi^*, S(\pi^*)) \leq 0$ e $F(\pi,\pi) = -\{k\pi^2 + [\mu(1-\beta)\pi - \gamma\bar{y}]^2\}$, conclui-se que

$$z(\mu,\beta) \leq \frac{1}{1-\delta_b}\left\{k(\pi^*)^2 + [\mu(1-\beta)\pi^* - \gamma\bar{y}]^2\right\} - \frac{\delta_b}{1-\delta_b}\left\{k\tilde{\pi}^2 + [\mu(1-\beta)\tilde{\pi} - \gamma\bar{y}]^2\right\}.$$

Simples manipulações algébricas estabelecem que

$$z(\mu,\beta) \leq \frac{[k+\mu^2(1-\beta)^2](\pi^*)^2}{1-\delta_b} + (\gamma\bar{y})^2 - \frac{\delta_b}{1-\delta_b}\{[k+\mu^2(1-\beta)^2]\tilde{\pi}^2 - 2\mu(1-\beta)\gamma\bar{y}\tilde{\pi}\},$$

Faça $\mu = \bar{\mu}$ na última desigualdade. Após algumas simplificações, verifica-se que

$$z(\bar{\mu},\beta) \leq \frac{k(2-\beta)(\pi^*)^2}{1-\delta_b} + (\gamma\bar{y})^2 - \frac{\delta_b}{1-\delta_b}\left[\frac{2-\beta}{4(1-\beta)} - 1\right](\gamma\bar{y})^2.$$

O lado direito dessa desigualdade diverge para $-\infty$ à medida que $\beta \to 1^-$. Logo, existe um número β_0 tal que se $\beta \geq \beta_0$, então $z(\bar{\mu},\beta) \leq 0$.

O próximo passo consiste em mostrar que β_0 possui as propriedades desejadas. Considere a propriedade (i). Observe que

$$\beta \geq \beta_0 \Rightarrow z(\bar{\mu}, \beta) \leq 0 \Rightarrow \frac{C}{1-\delta_b} > z(\bar{\mu}, \beta).$$

Como z é contínua em μ, existe μ_1 tal que se $\mu \in [\mu_1, \bar{\mu})$, então $C/(1-\delta_b) \geq z(\mu, \beta)$. Tendo em vista a igualdade (5), podemos concluir que a última desigualdade é respeitada para $a \in [\alpha_1, \bar{a})$, onde α_1 é tal que $\mu_1 = [(1-\alpha_1)\eta]^{-1}$. Logo, (24) é satisfeita e consequentemente Π^* é um resultado do jogo. Com relação à propriedade (ii), é suficiente aplicar o raciocínio utilizado na demonstração da Proposição 2. $\square$