ANÁLISE MATEMÁTICA PARA ECONOMISTAS: NOTAS DE AULA

Elaboração: Alexandre B. Cunha

Introdução à Otimização Intertemporal

Considere o seguinte problema:

$$\max_{\{c_t,k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(c_t) \tag{1}$$

sujeito a

$$c_t + k_{t+1} - (1-\delta)k_t \leq f(k_t). \tag{2}$$

Restrições implícitas: $c_t \geq 0$ e $k_{t+1} \geq 0$ ($[k_{t+1} \geq 0]$ vs. $[k_{t+1} - (1-\delta)k_t] \geq 0$).
Hipóteses: $k_0 > 0$ dado, $\beta \in (0,1)$ e $\delta \in (0,1)$. As funções U e f são côncavas, estritamente crescentes, diferenciáveis em $\mathbb{R}_{++}$ e satisfazem às condições de Inada

$$\lim_{c \to 0^+} U'(c) = \infty \quad \text{e} \quad \lim_{k \to 0^+} f'(k) = \infty.$$

Adicionalmente, $f(0) = 0$.

O nosso objetivo consiste em resolver (1) e a sua versão em tempo contínuo. Inicialmente, nós iremos *truncar* o problema. Ou seja, analisaremos versões em horizonte finito de (1). Feito isso, retornaremos ao problema original. Em seguida, analisaremos a versão de tempo contínuo.

Tempo Discreto

Denote por T a data terminal do horizonte de otimização.

O Problema Truncado: $T = 1$

Considere o problema

$$\max_{(c_0, c_1, k_1, k_2)} U(c_0) + \beta U(c_1) \tag{3}$$

sujeito a

$$\begin{aligned} c_0 + k_1 - (1-\delta)k_0 &\leq f(k_0), \\ c_1 + k_2 - (1-\delta)k_1 &\leq f(k_1). \end{aligned}$$

A função de Lagrange $\mathcal{L}$ para esse problema é dada por

$$\mathcal{L} = U(c_0) + \beta U(c_1) - \lambda_0[c_0 + k_1 - (1-\delta)k_0 - f(k_0)] - \lambda_1[c_1 + k_2 - (1-\delta)k_1 - f(k_1)].$$

As condições de primeira ordem (CPO), as quais são necessárias e suficientes (razão?), são as seguintes:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_0} = 0, \; \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_1} = 0, \; \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial k_1} = 0, \; k_2 = 0, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_0} = 0 \text{ e } \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_1} = 0.$$

Essas condições são equivalentes a

$$U'(c_0) = \lambda_0, \tag{4}$$

$$\beta U'(c_1) = \lambda_1, \tag{5}$$

$$-\lambda_0 + \lambda_1[(1-\delta) + f'(k_1)] = 0, \tag{6}$$

$$k_2 = 0, \tag{7}$$

$$c_0 + k_1 - (1-\delta)k_0 = f(k_0) \tag{8}$$

e

$$c_1 + k_2 - (1-\delta)k_1 = f(k_1). \tag{9}$$

Observe que temos um sistema de seis equações e seis variáveis (c_0, c_1, k_1, k_2, λ_0 e λ_1).

O próximo passo consiste em eliminar os multiplicadores de Lagrange do sistema que caracteriza a solução de (3). Combine (4), (5) e (6) de forma a concluir que

$$\begin{aligned} -U'(c_0) + \beta U'(c_1)[(1-\delta) + f'(k_1)] = 0 \Rightarrow \\ \beta \frac{U'(c_1)}{U'(c_0)} = \frac{1}{1 + f'(k_1) - \delta}. \end{aligned} \tag{10}$$

A última igualdade é uma *Equação de Euler*. Interpretação? No ponto ótimo a taxa marginal de substituição intertemporal deve ser igual ao recíproco da soma de 1 com a "taxa real de juros".

A solução de (3) é *caracterizada* por (10), (7), (8) e (9). A menos que se introduza alguma hipótese adicional, não é possível obter uma caracterização mais precisa.

O Problema Truncado: T genérico

Em tal contexto, (1) se converte no problema

$$\max_{\{c_t, k_{t+1}\}_{t=0}^{T}} \sum_{t=0}^{T} \beta^t U(c_t) \tag{11}$$

sujeito a (2). A correspondente função de Lagrange é

$$\mathcal{L} = \sum_{t=0}^{T} \left\{ \beta^t U(c_t) - \lambda_t [c_t + k_{t+1} - (1-\delta) k_t - f(k_t)] \right\}.$$

As CPO (necessárias e suficientes) são

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_t} = 0,\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial k_{t+1}} = 0 \text{ para } t+1 \leq T,\ k_{T+1} = 0 \text{ e } \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_t} = 0,$$

as quais são equivalentes a

$$\beta^t U'(c_t) = \lambda_t, \tag{12}$$

$$-\lambda_t + \lambda_{t+1}[(1-\delta) + f'(k_{t+1})] = 0 \text{ para } t+1 \leq T, \tag{13}$$

$$k_{T+1} = 0 \tag{14}$$

e

$$c_t + k_{t+1} - (1-\delta) k_t = f(k_t). \tag{15}$$

De forma similar ao que foi feito na seção anterior, combine (12) com (13) para concluir que

$$-\beta^t U'(c_t) + \beta^{t+1} U'(c_{t+1})[(1-\delta) + f'(k_{t+1})] = 0 \Rightarrow$$

$$\beta \frac{U'(c_{t+1})}{U'(c_t)} = \frac{1}{1 + f'(k_{t+1}) - \delta}. \tag{16}$$

Dito isto, a solução é caracterizada por (16), (15) e (14); lembre que k_0 é dado. Temos um sistema com duas equações de diferenças com duas variáveis e duas condições de contorno: uma condição inicial (k_0 dado) e uma condição terminal ($k_{T+1} = 0$, sendo que essa última foi determinada otimamente).

Antes de passarmos para o estudo do caso em $T = \infty$, convém analisar com mais detalhes a condição (14). Observe que a condição de primeira ordem com respeito à variável k_{T+1} é

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial k_{T+1}} \leq 0 \quad \text{e} \quad k_{T+1} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial k_{T+1}} = 0. \tag{17}$$

Vale ressaltar que a CPO para c_t é dada por

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_t} \leq 0 \quad \text{e} \quad c_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_t} = 0.$$

Entretanto, a condição de Inada $\lim_{c \to 0^+} U'(c) = \infty$ assegura que o valor ótimo de c_t é positivo. Desta forma, as duas condições acima se resumem a $\partial \mathcal{L}/\partial c_t = 0$. Dito isto, considere (17). Como

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial k_{T+1}} = -\lambda_T = -\beta^T U'(c_T) < 0,$$

podemos concluir que o valor ótimo de k_{T+1} é zero. Adicionalmente, tendo em vista que $\partial \mathcal{L}/\partial k_{T+1} = -\lambda_T$, a igualdade em (17) é equivalente a

$$\lambda_T k_{T+1} = 0. \tag{18}$$

Vale ressaltar que o fato que $\lambda_T > 0$ assegura que a última condição é equivalente a $k_{T+1} = 0$.

É preciso interpretar a condição (18). Inicialmente, observe que ela é equivalente a

$$\frac{\lambda_T}{\lambda_0} k_{T+1} = 0.$$

Por outro lado,

$$\frac{\lambda_T}{\lambda_0} = \frac{\lambda_T}{\lambda_{T-1}} \times \frac{\lambda_{T-1}}{\lambda_{T-2}} \times \cdots \times \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \times \frac{\lambda_1}{\lambda_0}.$$

Combine a última igualdade com a Equação de Euler (13) para concluir que

$$\frac{\lambda_T}{\lambda_0} = \frac{1}{1+r_T} \times \frac{1}{1+r_{T-1}} \times \cdots \times \frac{1}{1+r_2} \times \frac{1}{1+r_1} = \prod_{t=1}^{T} \frac{1}{1+r_t},$$

onde $r_t = f'(k_t) - \delta$ (lembre da relação entre o produto marginal de capital e a taxa real de juros). Logo,

$$\lambda_T k_{T+1} = 0 \Leftrightarrow \left(\prod_{t=1}^{T} \frac{1}{1+r_t} \right) k_{T+1} = 0.$$

A última igualdade impõe que o valor presente descontado do estoque terminal de capital é zero. Dito isto, podemos agora analisar o problema original.

O Problema Original

A função de Lagrange é

$$\mathcal{L} = \sum_{t=0}^{\infty} \left\{ \beta^t U(c_t) - \lambda_t [c_t + k_{t+1} - (1-\delta)k_t - f(k_t)] \right\}. \tag{19}$$

Em alguns contextos, é preferível escrever o lagrangiano da seguinte maneira:

$$\mathcal{L} = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left\{ U(c_t) - \mu_t [c_t + k_{t+1} - (1-\delta)k_t - f(k_t)] \right\}.$$

Evidentemente, μ_t e λ_t satisfazem a condição

$$\beta^t \mu_t = \lambda_t. \tag{20}$$

Trabalharemos com (19). As CPO (necessárias e suficientes) do problema (1) são

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_t} = 0,\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial k_{t+1}} = 0,\ \lim_{t\to\infty} \lambda_t k_{t+1} = 0 \text{ e } \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_t} = 0.$$

De forma similar ao do problema truncado para um T genérico, essas condições são equivalentes a

$$\beta^t U'(c_t) = \lambda_t, \tag{21}$$

$$-\lambda_t + \lambda_{t+1}[(1-\delta) + f'(k_{t+1})] = 0, \tag{22}$$

$$\lim_{t\to\infty} \lambda_t k_{t+1} = 0 \tag{23}$$

e

$$c_t + k_{t+1} - (1-\delta)k_t = f(k_t). \tag{24}$$

Observe que (21), (22) e (24) são idênticas às condições correspondentes do problema (11), ao passo que (23) pode ser interpretada como a versão para horizonte infinito de (18).

Mais uma vez, é possível utilizar a CPO para c_t para eliminar os multiplicadores de Lagrange. Esse procedimento leva à Equação de Euler

$$\beta \frac{U'(c_{t+1})}{U'(c_t)} = \frac{1}{1 + f'(k_{t+1}) - \delta}, \tag{25}$$

que é idêntica à igualdade (16), e

$$\lim_{t\to\infty} \beta^t U'(c_t) k_{t+1} = 0. \tag{26}$$

Dito isto, a solução do problema é caracterizada por (25), (26) e (24). A exemplo do caso anterior, temos um sistema com duas equações de diferenças e duas variáveis, uma condição inicial e uma condição terminal.

Em diversas aplicações, é desejável identificar um *steady-state*. Ou seja, busca-se um par de valores constates c^* e k^* para o consumo e o estoque de capital que satisfaça (25), (26) e (24) (atenção: a condição inicial foi propositalmente omitida). Observe que (26) é trivialmente satisfeita em um *steady-state*. O valor do estoque de capital é dado pela solução de

$$\beta = \frac{1}{1 + f'(k^*) - \delta}$$

e, dado k^*, c^* satisfaz

$$c^* = f(k^*) - \delta k^*.$$

Uma questão técnica Dado T, denote a solução de (11) por $\{c_t^*(T), k_{t+1}^*(T)\}_{t=0}^T$. Aparentemente, para obter a solução de (1) é suficiente avaliar, para cada t, os limites

$$\lim_{T\to\infty} c_t^*(T) \quad \text{e} \quad \lim_{T\to\infty} k_{t+1}^*(T). \tag{27}$$

Contudo, a questão não é tão simples assim.

Observe que é possível utilizar o fato de que a soluções (11) e (1) são tais que (2) se verificará como igualdade para concluir que $c_t = f(k_t) + (1-\delta)k_t - k_{t+1}$. Logo, é possível escrever o problema (11) como

$$\max_{\{k_{t+1}\}_{t=0}^T} \sum_{t=0}^T \beta^t v(k_t, k_{t+1}),$$

onde $v(k_t, k_{t+1}) = U(f(k_t) + (1-\delta)k_t - k_{t+1})$. Dito isto, afirmar que a solução de (1) pode ser obtida simplesmente tomando os limites em (27) envolve dizer que

$$\lim_{T\to\infty} \left[\max_{\{k_{t+1}\}_{t=0}^T} \sum_{t=0}^T \beta^t v(k_t, k_{t+1}) \right] = \max_{\{k_{t+1}\}_{t=0}^\infty} \left[\lim_{T\to\infty} \sum_{t=0}^T \beta^t v(k_t, k_{t+1}) \right].$$

Contudo, a "troca da ordem" de operadores (no caso lim e max) está longe de ser algo simples. Por exemplo, a continuidade de uma função f no ponto $\bar{x}$ depende de igualdade $\lim_{x\to\bar{x}} f(x) = f(\lim_{x\to\bar{x}} x)$ se verificar ou não (observe a troca da ordem das operações lim e "f").

Tempo Contínuo

Uma referência bibliográfica possivelmente útil para esta subseção é Intriligator (1971, seção 16.2). Considere o problema de escolher funções $c(t)$ e $k(t)$ contínuas de forma a

$$\max \int_0^\infty e^{-\delta t} U(c(t)) dt \tag{28}$$

sujeito a

$$c(t) + \dot{k}(t) + \lambda k(t) = f(k(t)) \tag{29}$$

e $k(0) = k_0$ (dado). Observe a mudança na notação referente ao fator de desconto e a taxa de depreciação do estoque de capital. As funções U e f possuem as propriedades anteriormente discutidas.

O primeiro passo do processo de resolução é montar o *hamiltoniano* ($\mathcal{H}$):

$$\mathcal{H} = e^{-\delta t}\{U(c) + q[f(k) - \lambda k - c]\}, \tag{30}$$

Observe que k é a variável de estado (*state variable*), c é a variável de controle (*control variable*) e q é a *costate variable*. Além de (29), as condições de primeira ordem são

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial c} = 0,\ \frac{d[e^{-\delta t} q]}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial k} \text{ e } \lim_{t\to\infty} e^{-\delta t} q(t) k(t) = 0.$$

Como

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial c} = 0 \Rightarrow U'(c) = q$$

e

$$\begin{aligned} \frac{d[e^{-\delta t} q]}{dt} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial k} \Rightarrow -\delta e^{-\delta t} q + e^{-\delta t} \dot{q} = -e^{-\delta t} q[f'(k) - \lambda] \Rightarrow \\ \frac{\dot{q}}{q} &= -[f'(k) - (\lambda + \delta)], \end{aligned}$$

a solução é caracterizada por (29),

$$U'(c(t)) = q(t), \tag{31}$$

$$\frac{\dot{q}(t)}{q(t)} = -[f'(k(t)) - (\lambda + \delta)] \tag{32}$$

e

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\delta t} q(t) k(t) = 0. \tag{33}$$

É possível eliminar a *costate variable* q. Diferencie (31) com respeito a t para concluir que

$$U''(c(t)) \dot{c}(t) = \dot{q}(t).$$

Combine essa igualdade com (31), (32) e (33) para concluir que

$$\frac{U''(c(t))}{U'(c(t))}\dot{c}(t) = -[f'(k(t)) - (\lambda + \delta)] \tag{34}$$

e

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\delta t} U'(c(t))k(t) = 0. \tag{35}$$

Assim sendo, as trajetória de ótimas de c e k são determinadas por (29), (34), pela condição inicial $k(0) = k_0$ e pela condição de transversalidade (35).

Sejam c^* e k^* os valores de *steady-state* das correspondentes variáveis. Esses valores são dados por $f'(k^*) = \lambda + \delta$ e $c^* = f(k^*) - \lambda k^*$. Vale ressaltar que (35) é trivialmente satisfeita em um *steady-state*.

Comparando as Soluções

Encerraremos este tópico realizando uma comparação das condições que caracterizam a solução para o problema em tempo discreto com àquelas de tempo contínuo. Lembre que nesse último caso a solução é caracterizada pelas seguintes igualdades: (29), (31), (32) e (33).

Quando o tempo é mensurado de forma discreta, a trajetória ótima de c e k é caracterizada por (24), (21), (22) e (23). Existe uma óbvia relação entre (29) e (24). No tocante às demais condições, defina μ_t conforme especificado em (20) e a variável auxiliar γ de forma que $e^{-\gamma} = \beta$. Desta forma, é possível reescrever as demais CPO de (1) da seguinte forma:

$$U'(c_t) = \mu_t, \tag{36}$$

$$-\mu_t + e^{-\gamma}\mu_{t+1}[(1-\delta) + f'(k_{t+1})] = 0 \tag{37}$$

e

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\gamma t}\mu_t k_{t+1} = 0. \tag{38}$$

Feito isto, não é difícil identificar as semelhanças entre (31) e (36) e (33) e (38).

Apesar de isso não ser imediatamente visível, existe uma semelhança entre (32) e (37). De fato, para economizar na notação, denote $e^{-\gamma}[1 - \delta + f'(k_{t+1})]$ por x_t. Em seguida, efetue uma mudança de notação de forma que t deixe de ser um subscrito e seja escrito entre parênteses. Assim sendo,

$$-\mu(t) + \mu(t+1)x(t) = 0. \tag{39}$$

Agora, seja s uma data maior que t. **Assuma** (essa hipótese será discutida posteriormente) que

$$x(t) = x(t+1) = x(t+2)\cdots = x(t+s) = x. \tag{40}$$

A igualdade (39) implica que

$$\mu(s) = \mu(t)x^{t-s} \Rightarrow \mu(s) - \mu(t) = \mu(t)(x^{t-s} - 1) \Rightarrow \frac{\mu(s) - \mu(t)}{s - t}\frac{1}{\mu(t)} = -\frac{x^{t-s} - 1}{t - s}.$$

Agora, faça $s \to t$. Esse procedimento leva a

$$\frac{d\mu(t)}{dt}\frac{1}{\mu(t)} = -\lim_{s \to t}\frac{x^{t-s} - 1}{t - s}.$$

Todavia, se $x > 0$, então

$$\lim_{\alpha \to 0}\frac{x^{\alpha} - 1}{\alpha} = \ln x.$$

Logo,

$$\frac{\dot{\mu}}{\mu} = -\ln x = -\ln\{e^{-\gamma}[(1 - \delta) + f'(k)]\} = \gamma - \ln[1 - \delta + f'(k)].$$

Agora, utilize o fato que $\ln[1 - \delta + f'(k)] \cong [1 - \delta + f'(k)] - 1 = f'(k) - \delta$. Assim sendo,

$$\frac{\dot{\mu}}{\mu} \cong \gamma - f'(k) + \delta \Rightarrow \frac{\dot{\mu}}{\mu} \cong -[f'(k) - (\delta + \gamma)].$$

Compare a última relação com (32) (seja cuidadoso com a notação).

No tocante à hipótese introduzida em (40), segue-se um esboço das justificativas para a sua adoção: (i) $s \to t$ e (ii) ela não foi utilizada para demonstrar um resultado (esse é o principal argumento).