ANÁLISE MATEMÁTICA PARA ECONOMISTAS: NOTAS DE AULA

Elaboração: Alexandre B. Cunha

Introdução: Lógica e Demonstrações

- Considere a seguinte sentença: se f é diferenciável no ponto $\bar{x}$, então f é contínua no ponto $\bar{x}$.
  - *Tradeoff* entre clareza e elegância.
    - Se f é diferenciável no ponto $\bar{x}$, então f é contínua no ponto em questão.
  - Enunciado alternativo.
    - P: f é diferenciável no ponto $\bar{x}$
    - Q: f é contínua no ponto $\bar{x}$
    - $P \Rightarrow Q$ Lê-se P implica Q.
  - Atenção: os símbolos "$\Rightarrow$" e "$\rightarrow$" possuem significados distintos; é necessário utilizar os símbolos corretos.

- Como provar a veracidade de uma afirmativa do tipo $[P \Rightarrow Q]$?
  - Há pelo menos três maneiras.
    1. Demonstração direta.
       - $P \Rightarrow R_1 \Rightarrow R_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow R_n \Rightarrow Q$
       - Evidentemente, podem ocorrer variações. Por exemplo: $P \Rightarrow R_1$, $P \Rightarrow R_2$ e $[(R_1 \ \& \ R_2) \Rightarrow Q]$.
    2. Demonstração por contraposição: utilize (1) para mostrar que $[\neg Q \Rightarrow \neg P]$.
       - As afirmativas $[P \Rightarrow Q]$ e $[\neg Q \Rightarrow \neg P]$ são *equivalentes*.

  * Duas afirmativas R e S são equivalentes quando R implica S e S implica R. Em símbolos, $[R \Leftrightarrow S]$.
  * Exemplos: $[x > 2 \Rightarrow x > 0]$ e $[x \leq 0 \Rightarrow x \leq 2]$; *Alexandre nasceu no Rio de Janeiro implica que Alexandre nasceu no Brasil* e *Alexandre não nasceu no Brasil implica que Alexandre não nasceu no Rio de Janeiro*.
  * Voltaremos a discutir logo abaixo as afirmativas do tipo $[R \Leftrightarrow S]$.

3. Demonstração por contradição (ou absurdo).
  * Assuma que $[P \ \& \ \neg Q]$ é verdade e obtenha uma contradição.
  * Contradição a um fato conhecido ou a algum conclusão obtida ao longo do seu argumento.
  * Primeiro Teorema do Bem-Estar Social.

- Exemplo: $[x > 1 \Rightarrow x^2 > 1]$.

Prova direta: Como $x > 1$, $x^2 > x$. Combine essas duas desigualdades para concluir que $x^2 > 1$. $\square$

Comentário: o símbolo de Halmos $\square$ denota o fim de uma demonstração (retângulo cheio no livro do Paul Halmos).

Dica: não questione o porquê de cada passo; questione a sua correção.

Prova por contraposição: Assuma que $x^2 \leq 1$; desta forma, $x^2 - 1 \leq 0$. Utilize a última desigualdade para concluir que $(x-1)(x+1) \leq 0$. Assim sendo, $x - 1 \leq 0$ ou $x + 1 \leq 0$. Se a primeira dessas duas desigualdades se verifica, então $x \leq 1$. Por outro lado, se $x + 1 \leq 0$, então $x \leq -1 \leq 1$. $\square$

Comentário: significado de "ou". Inglês: *or* (ou) e *either...or* (ou...ou).

Prova por contradição: Suponha que $x > 1$ e $x^2 \leq 1$. Como $-x < -1$, $x^2 - x < 0$. A última desigualdade implica que $x(x-1) < 0$. Logo, $x < 0$ ou $x < 1$. Contudo, qualquer uma das duas últimas desigualdades contradiz a hipótese de que $x > 1$. $\square$

Comentário: também se poderia afirmar que a expressão $x(x-1) < 0$ contradiz o fato de que o produto de dois números positivos é positivo.

Atenção É preciso utilizar "texto". Compare a prova por contradição com o rascunho que se segue.

$$\begin{array}{rcl} x & > & 1 \qquad x^2 \leq 1 \\ -x & < & -1 \Rightarrow x^2 - x < 0 \Rightarrow x(x-1) < 0 \\ x & < & 0 \qquad x < 1 \qquad \text{absurdo!} \end{array}$$

Vale ressaltar que as expressões matemáticas precisam respeitar as regras de pontuação.

- A expressão "se e somente se".
  - R se e somente se S significa $[R \Leftrightarrow S]$.
    * Formulação alternativa: R é necessária e suficiente para S.
    * Parte "se" (necessidade ou condição necessária): $[S \Rightarrow R]$.
    * Parte "somente se" (suficiência ou condição suficiente): $[R \Rightarrow S]$.
  - Inglês: *if and only if* ou *iff* (jargão matemático; Halmos mais uma vez).
  - Sugestão: faça a prova de uma afirmativa do tipo "se e somente se" por partes. Primeiro mostre que $[R \Rightarrow S]$ e depois prove $[S \Rightarrow R]$.

O Princípio da Indução Sejam q um número real diferente de 1, n um número natural e $P(n)$ a afirmativa

$$\sum_{i=1}^{n} q^i = \frac{q - q^{n+1}}{1-q}. \tag{1}$$

Suponha que se deseja provar que $P(n)$ é verdade para todo n. Evidentemente, não é viável provar individualmente cada uma dessas infinitas afirmativas. Contudo, é suficiente provar que: (i) $P(1)$ está correta e (ii) $[P(n) \Rightarrow P(n+1)]$.

Considere o item (i). Se $n = 1$, então o lado esquerdo de (1) é igual a q. Por sua vez, o lado direito é igual a

$$\frac{q - q^2}{1-q} = q.$$

Logo, $P(1)$ é verdadeira. Com relação ao item (ii) assuma que (1) é verdade. Some q^{n+1} de ambos lados dessa igualdade. Assim sendo,

$$\sum_{i=1}^{n+1} q^i = \frac{q - q^{n+1}}{1-q} + q^{n+1} = \frac{q - q^{n+1}}{1-q} + \frac{q^{n+1} - q^{n+2}}{1-q} \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} q^i = \frac{q - q^{n+2}}{1-q}. \tag{2}$$

Desta forma, $P(n)$ efetivamente implica $P(n+1)$. □

- Comentários sobre a prova do item (ii):
  - O primeiro passo consiste em escrever a igualdade (2) no seu rascunho.
    * Idealmente (ressalto: idealmente), você terá uma noção precisa daquilo que você quer provar.
  - Faça alguma operação que o coloque na direção do resultado desejado.
  - O seu rascunho não faz parte da demonstração.