UFRJ Análise Matemática para Economistas P2 2021/0
Professor Alexandre B. Cunha
Resolva 2 (duas) das 3 (três) questões.

(1) Sejam (x_n) uma sequência de números reais, a um número real positivo e (y_n) a sequência definida por $y_n = ax_n$. Mostre que se $\lim(x_n) = x$, então $\lim(y_n) = ax$.

(2) Considere a sequência de números reais definida recursivamente por $z_1 = 80$ e

$$z_{n+1} = \frac{1}{4}z_n + 12 \ .$$

Prove que (z_n) é convergente e calcule o seu limite.

(3) Seja (x_n) a sequência definida por

$$x_n = n^2 \left(\frac{1}{3}\right)^n .$$

Mostre que $\lim(x_n) = 0$.

Respostas

(1) Seja ε um número positivo qualquer. Como $\lim(x_n) = x$, existe um número natural $K(\varepsilon)$ tal que

$$n \geq K(\varepsilon) \Rightarrow |x_n - x| < \frac{\varepsilon}{a} \Rightarrow a|x_n - x| < \varepsilon \Rightarrow |ax_n - ax| < \varepsilon \Rightarrow |y_n - ax| < \varepsilon \ .$$

Assim sendo, $\lim(y_n) = ax$.

(2) Seja $P(n)$ a afirmativa

$$0 \leq z_{n+1} \leq z_n \leq 80.$$

Utilizaremos o Princípio da Indução para mostrar que ela é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $z_1 = 80$ e $z_2 = 32$, $P(1)$ é verdadeira. Agora, assuma que $P(n)$ se verifique. Logo,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{1}{4}z_{n+1} \leq \frac{1}{4}z_n \leq 20 \Rightarrow 12 \leq \frac{1}{4}z_{n+1} + 12 \leq \frac{1}{4}z_n + 12 \leq 32 \Rightarrow \\ 12 &\leq z_{n+2} \leq z_{n+1} \leq 32 \Rightarrow 0 \leq z_{n+2} \leq z_{n+1} \leq 80. \end{aligned}$$

Tendo em vista que $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$, concluímos que (z_n) é decrescente e limitada. Logo, ela é convergente. Por fim, denote o seu limite por z. Desta forma,

$$z = \frac{1}{4}z + 12 \Rightarrow \frac{3}{4}z = 12 \Rightarrow z = 16.$$

(3) Inicialmente, observe que

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{n^2 \left(\frac{1}{3}\right)^n} = \left(\frac{n^2+2n+1}{n^2}\right)\frac{1}{3} = \left(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right)\frac{1}{3}.$$

Como

$$\lim\left(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = 1,$$

podemos concluir que

$$\lim\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right) = \frac{1}{3} < 1 \Rightarrow \lim(x_n) = 0.$$