UFRJ Análise Matemática para Economistas P1 2021/0
Professor Alexandre B. Cunha
Resolva 2 (duas) das 3 (três) questões.

(1) Utilize o Princípio da Indução para provar que

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2 \ .$$

(2) Sejam $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ duas funções injetivas. Defina $h : X \to Z$ de forma que $h(x) = g(f(x))$. Mostre que h também é injetiva.

(3) Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ e $g : X \to \mathbb{R}$ duas funções limitadas. Mostre que se $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in X$, então

$$\sup_{x\in X} f(x) \leq \sup_{x\in X} g(x) \ .$$

Respostas

(1) Seja $P(n)$ a afirmativa em análise. Como

$$\sum_{i=1}^{1}(2i-1) = 1 = 1^2,$$

$P(1)$ é verdadeira.

Resta mostrar que $[P(n) \Rightarrow P(n+1)]$. Assuma que $P(n)$ se verifica e some a expressão $[2(n+1)-1]$ a ambos os lados da igualdade. Desta forma,

$$\begin{aligned} \left[\sum_{i=1}^{n}(2i-1)\right] + [2(n+1)-1] &= n^2 + [2(n+1)-1] \Rightarrow \\ \sum_{i=1}^{n+1}(2i-1) &= n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2. \end{aligned}$$

Logo, $P(n+1)$ também se verifica.

(2) Sejam x_1 e x_2 elementos de X tais que $h(x_1) = h(x_2)$. Tendo em vista a definição de h, podemos concluir que $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$. Com g é injetiva, $f(x_1) = f(x_2)$. Por sua vez, o fato de que f também é injetiva implica que $x_1 = x_2$. Assim sendo, h é injetiva.

(3) A definição de supremo implica que

$$g(x) \leq \sup_{y \in X} g(y), \; \forall x \in X \ .$$

Combine a desigualdade acima com a hipótese de que $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in X$ para concluir que

$$f(x) \leq \sup_{y \in X} g(y), \; \forall x \in X \ .$$

Desta forma, $\sup_{y \in X} g(y)$ é uma cota superior para f. Tendo em vista que $\sup_{x \in X} f(x)$ é a menor cota superior de f, concluímos então que

$$\sup_{x \in X} f(x) \leq \sup_{x \in X} g(x) \ .$$