UFRJ Análise Matemática para Economistas P1 2016/0
Professor Alexandre B. Cunha
Resolva 2 (duas) das 3 (três) questões.

(1) Sejam X e Y dois conjuntos limitados contidos em $\mathbb{R}$. Mostre que

$$X \subseteq Y \Rightarrow \sup X \leq \sup Y \ .$$

(2) Utilize o princípio da indução para provar que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1} \ .$$

(3) Sejam f uma função de X em Y e A e B dois subconjuntos de X. Mostre que

$$f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B) \ .$$

Respostas

(1) Seja x qualquer elemento de X. Como $X \subseteq Y$, então $x \in Y$. Desta forma, $x \leq \sup Y$. Logo, $\sup Y$ é uma cota superior de X. Como $\sup X$ é a menor cota superior de X, conclui-se que $\sup X \leq \sup Y$.

(2) Seja $P(n)$ a afirmativa em análise. Tendo em vista que

$$\frac{1}{1(1+1)} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1} \ ,$$

$P(1)$ é verdadeira. Assuma que $P(n)$ se verifica. Observe que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i(i+1)} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \Rightarrow \\
\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i(i+1)} &= \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} \Rightarrow \\
\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i(i+1)} &= \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2} \ .
\end{aligned}$$

(3) Seja y qualquer elemento de $f(A \cap B)$. Logo, existe $x \in A \cap B$ tal que $f(x) = y$. Como $x \in A$, $y \in f(A)$; similarmente, $y \in f(B)$. Assim sendo, $y \in f(A) \cap f(B)$.

UFRJ Análise Matemática para Economistas P2 2016/0
Professor Alexandre B. Cunha
Resolva 2 (duas) das 3 (três) questões.

(1) Seja (x_n) uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$. Mostre, sem utilizar o fato de que uma sequência com tal propriedade é convergente, que (x_n) é limitada.

(2) Considere a sequência definida recursivamente por $y_1 = 2$ e

$$y_{n+1} = \frac{1}{2}y_n + 4 \ .$$

Prove que (y_n) é convergente.

(3) Considere o problema de selecionar trajetórias contínuas para $c(t)$ e $k(t)$ de forma a maximizar

$$\int_0^\infty e^{-\delta t} U(c(t))dt$$

sujeito à restrição

$$c(t) + \dot{k}(t) + \lambda k(t) = f(k(t)) \ , \ k(0) = \bar{k} \ .$$

Ambas as funções u e f são estritamente crescentes, côncavas, diferenciáveis e satisfazem à condição de Inada. Monte o hamiltoniano e enuncie as condições de primeira ordem.

Respostas

(1) Como (x_n) é de Cauchy, existe um número natural K tal que $|x_n - x_K| < 1$ para todo $n \geq K$. Tendo em vista que

$$|x_n - x_K| < 1 \Rightarrow |x_n - x_K| + |x_K| < 1 + |x_K| \Rightarrow |x_n| < 1 + |x_K| \ ,$$

sabemos $|x_n| < 1 + |x_K|$ para todo $n \geq K$. Defina M de acordo com

$$M = \max\{|x_1|, |x_2|, ..., |x_{K-1}|, 1 + |x_K|\} \ .$$

Como $|x_n| \leq M$ para todo n, então (x_n) é limitada.

(2) É suficiente mostrar que (y_n) é (i) crescente e (ii) limitada. Utilizaremos o princípio da indução para estabelecer a veracidade de (i). Observe $y_1 = 2 < 5 = y_2$. Assim sendo, resta mostrar que $[y_n \leq y_{n+1} \Rightarrow y_{n+1} \leq y_{n+2}]$. De fato,

$$y_n \leq y_{n+1} \Rightarrow \frac{1}{2}y_n + 4 \leq \frac{1}{2}y_{n+1} + 4 \Rightarrow y_{n+1} \leq y_{n+2} \ .$$

No tocante a condição (ii), já se sabe que $y_1 \leq y_n$ para todo n. Logo, resta apenas estabelecer que existe uma cota superior para (y_n). Mais uma vez, utilizaremos o princípio da indução. Como $y_1 = 2 < 8$, podemos encerrar provando que $[y_n \leq 8 \Rightarrow y_{n+1} \leq 8]$.

$$y_n \leq 8 \Rightarrow \frac{1}{2} y_n + 4 \leq \frac{1}{2} 8 + 4 = 8 \Rightarrow y_{n+1} \leq 8 \ .$$

(3) O hamiltoniano ($\mathcal{H}$) é dado por

$$\mathcal{H} = e^{-\delta t} \left\{ U(c(t)) + q(t)[f(k(t)) - \lambda k(t) - c(t)] \right\} \ .$$

As condições de primeira ordem são

$$\begin{aligned} U'(c(t)) &= q(t) \ , \\ \frac{\dot{q}(t)}{q(t)} &= -[f'(k(t)) - (\lambda + \delta)] \ , \\ \dot{k}(t) &= f(k(t)) - \lambda k(t) - c(t) \end{aligned}$$

e

$$\lim_{t \to \infty} e^{-\delta t} q(t) k(t) = 0 \ .$$

UFRJ Análise Matemática para Economistas P1 2017/0
Professor Alexandre B. Cunha
Resolva 2 (duas) das 3 (três) questões.

(1) Utilize o princípio da indução para provar que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i=1}^{n} 2i = n(n+1) \ .$$

(2) Sejam A e B dois conjuntos limitados contidos em $\mathbb{R}$. Mostre se $\sup A < \sup B$, então existe $x \in B$ tal que $x \notin A$.

(3) Seja $A_1, A_2, ...$ uma família enumerável de conjuntos e B um conjunto qualquer. Mostre que

$$A_n \subseteq B, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq B \ .$$

Respostas

(1) Seja $P(n)$ a afirmativa em análise. Como

$$\sum_{i=1}^{1} 2i = 2 = 1(1+1),$$

então $P(1)$ é verdadeira. Resta mostrar que $[P(n) \Rightarrow P(n+1)]$. Assuma que $P(n)$ se verifica e some $2(n+1)$ de ambos lados da igualdade. Observe que

$$\left(\sum_{i=1}^{n} 2i\right) + 2(n+1) = n(n+1) + 2(n+1) = (n+2)(n+1) \Rightarrow \sum_{i=1}^{n+1} 2i = (n+1)(n+2) \ .$$

Concluímos então que $P(n+1)$ é verdadeira.

(2) Como $\sup A < \sup B$ e $\sup B$ é a menor cota superior de B, $\sup A$ não é uma cota superior de B. Desta forma, existe $x \in B$ que satisfaz a propriedade $\sup A < x$. Agora, observe que $a \leq \sup A$ para todo $a \in A$. Combine as duas últimas desigualdades para concluir que $a < x$ para todo $a \in A$. Este último fato implica que $x \notin A$.

(3) Seja x um elemento qualquer de $\cup_{n=1}^{\infty} A_n$. Assim sendo, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $x \in A_m$. Como $A_m \subseteq B$, então $x \in B$. Logo, $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq B$.

UFRJ Análise Matemática para Economistas P2 2017/0
Professor Alexandre B. Cunha
Resolva 2 (duas) das 3 (três) questões.

(1) Considere a sequência de números reais definida por $x_n = 1/(n+1)$. Prove que (x_n) é uma sequência de Cauchy utilizando a definição desse conceito.

(2) Seja (y_n) uma sequência de números reais. Mostre que se (y_n) é convergente, então ela é limitada.

(3) Considere a sequência de números reais definida recursivamente por $z_{n+1} = z_n/3+2/3$ e $z_1 = 6$. Prove que (z_n) é convergente.

Respostas

(1) Seja $H(\varepsilon)$ um número natural maior do que ε^{-1}. Observe que se $m > n \geq H(\varepsilon)$, então

$$n > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow n+1 > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{1}{n+1} < \varepsilon \Rightarrow 0 < \frac{1}{n+1} - \frac{1}{m+1} < \varepsilon \Rightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon \ .$$

(2) Denote o limite de (y_n) por y. Pela definição de limite, existe um número natural K tal que se $n \geq K$, então $|y_n - y| < 1$. Como

$$|y_n - y| < 1 \Rightarrow |y_n - y| + |y| < 1 + |y| \Rightarrow |y_n| < 1 + |y| \ ,$$

sabemos $|y_n| < 1 + |y|$ para todo $n \geq K$. Defina M de acordo com

$$M = \max\{|y_1|, |y_2|, ..., |y_{K-1}|, 1 + |y|\} \ .$$

Por fim, observe que $|y_n| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(3) É suficiente mostrar que (z_n) é (i) decrescente e (ii) limitada. Utilizaremos o princípio da indução para estabelecer a veracidade de (i). Observe $z_1 = 6 > 8/3 = z_2$. Assim sendo, resta mostrar que $[z_n \geq z_{n+1} \Rightarrow z_{n+1} \geq z_{n+2}]$. De fato,

$$z_n \geq z_{n+1} \Rightarrow \frac{1}{3}z_n + \frac{2}{3} \geq \frac{1}{3}z_{n+1} + \frac{2}{3} \Rightarrow z_{n+1} \geq z_{n+2} \ .$$

No tocante a condição (ii), já se sabe que $z_1 \geq z_n$ para todo n. Logo, resta apenas estabelecer que existe uma cota inferior para (z_n). Mais uma vez, utilizaremos o princípio da indução. Como $z_1 = 6 > 0$, podemos encerrar provando que $[z_n \geq 0 \Rightarrow z_{n+1} \geq 0]$.

$$z_n \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{3}z_n + \frac{2}{3} \geq 0 \Rightarrow z_{n+1} \geq 0 \ .$$

UFRJ Análise Matemática para Economistas P1 2020/0
Professor Alexandre B. Cunha
Resolva 2 (duas) das 3 (três) questões.

(1) Sejam f uma função de X em Y e A e B dois subconjuntos de X. Mostre que

$$f(A) \cup f(B) \subseteq f(A \cup B) \ .$$

(2) Utilize o Princípio da Indução para provar que

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{3}\right)^i = \frac{1-(1/3)^n}{2}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

(3) Sejam A e B dois conjuntos limitados e não vazios contidos em $\mathbb{R}$. Mostre que

$$A \subseteq B \Rightarrow \inf B \le \inf A \le \sup A \le \sup B \ .$$

Respostas

(1) Seja y qualquer elemento de $f(A) \cup f(B)$. Logo, (i) $y \in f(A)$ ou (ii) $y \in f(B)$. Se (i) se verifica, então existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$. Como x também pertence a $A \cup B$, pode se concluir que $f(x) \in f(A \cup B)$. Tendo em vista que $y = f(x)$, $y \in f(A \cup B)$. O mesmo raciocínio estabelece que se (ii) é verdadeira, então $y \in f(A \cup B)$. Desta forma, y certamente é um elemento de $f(A \cup B)$. Logo, $f(A) \cup f(B) \subseteq f(A \cup B)$.

(2) Seja $P(n)$ a afirmativa em análise. Como

$$\left(\frac{1}{3}\right)^1 = \frac{1}{3} = \frac{2/3}{2} = \frac{1-(1/3)^1}{2},$$

então $P(1)$ é verdadeira. Resta mostrar que $[P(n) \Rightarrow P(n+1)]$. Assuma que $P(n)$ se verifica e some $(1/3)^{n+1}$ a ambos os lados da igualdade. Desta forma,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} \left(\frac{1}{3}\right)^i &= \frac{1-(1/3)^n}{2} + \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} = \frac{1-(1/3)^n + 2 \times (1/3)^{n+1}}{2} \Rightarrow \\
\sum_{i=1}^{n+1} \left(\frac{1}{3}\right)^i &= \frac{1-(1/3)^n\,[1-2\times(1/3)]}{2} = \frac{1-(1/3)^n\,[1/3]}{2} = \frac{1-(1/3)^{n+1}}{2}.
\end{aligned}$$

Logo, $P(n+1)$ também se verifica.

(3) Seja x qualquer elemento de A. As definições de ínfimo e supremo implicam que $\inf A \leq x \leq \sup A$. Assim sendo,

$$\inf A \leq \sup A. \tag{1}$$

Adicionalmente, o fato de que $A \subseteq B$ implica que $x \in B$. Desta forma, $x \leq \sup B$. Logo, $\sup B$ é uma cota superior de A. Como $\sup A$ é a menor cota superior de A,

$$\sup A \leq \sup B. \tag{2}$$

Similarmente, $\inf B \leq x$, o que implica que $\inf B$ é uma cota inferior de A. Tendo em vista que $\inf A$ é a maior cota inferior de A,

$$\inf B \leq \inf A. \tag{3}$$

Combine as desigualdades (1), (2) e (3) para obter o resultado desejado.

UFRJ Análise Matemática para Economistas P2 2020/0
Professor Alexandre B. Cunha
Resolva 2 (duas) das 3 (três) questões.

(1) Seja (x_n) uma sequência de números reais. Mostre que se (x_n) é convergente, então (x_n) é uma sequência de Cauchy.

(2) Seja (y_n) a sequência de números reais definida indutivamente por $y_{n+1} = \frac{1}{2}y_n + 4$ e $y_1 = 16$. Prove que (y_n) é convergente e calcule o seu limite.

(3) Considere o problema de selecionar $\{c_t, k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}$ de forma a maximizar

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t)$$

sujeito à restrição

$$c_t + k_{t+1} - (1-\delta)k_t \le f(k_t) \ , \ k_0 = \bar{k} \ .$$

Ambas as funções u e f são estritamente crescentes, côncavas, diferenciáveis e satisfazem à condição de Inada. Monte a função de Lagrange e enuncie as condições de primeira ordem. Em seguida, caracterize a solução do problema (a sua caracterização não pode depender do multiplicador de Lagrange).

Respostas

(1) Seja ε um real positivo. Como (x_n) é convergente, existem um natural $K(\varepsilon/2)$ e um real x tal que

$$|x_n - x| < \varepsilon/2 \ \ \& \ \ |x_m - x| < \varepsilon/2$$

para todo $m, n \ge K(\varepsilon/2)$. Defina $H(\varepsilon) = K(\varepsilon/2)$ e suponha que $m, n \ge H(\varepsilon)$. Assim sendo,

$$|x_n - x_m| = |(x_n - x) + (x - x_m)| \le |x_n - x| + |x_m - x| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \Rightarrow$$
$$|x_n - x_m| < \varepsilon.$$

(2) Seja $P(n)$ a afirmativa

$$0 \le y_{n+1} \le y_n \le 16.$$

Utilizaremos o Princípio da Indução para mostrar que ela é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $y_1 = 16$ e $y_2 = 12$, $P(1)$ é verdadeira. Agora, assuma que $P(n)$ se verifique. Logo,

$$\begin{aligned} 0 &\le \frac{1}{2}y_{n+1} \le \frac{1}{2}y_n \le 8 \Rightarrow 4 \le \frac{1}{2}y_{n+1} + 4 \le \frac{1}{2}y_n + 4 \le 12 \Rightarrow \\ 4 &\le y_{n+2} \le y_{n+1} \le 12 \Rightarrow 0 \le y_{n+2} \le y_{n+1} \le 16. \end{aligned}$$

Tendo em vista que $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$, concluímos que (y_n) é decrescente e limitada. Logo, ela é convergente. Por fim, denote o seu limite por y. Desta forma,

$$y = \frac{1}{2}y + 4 \Rightarrow \frac{1}{2}y = 4 \Rightarrow y = 8.$$

(3) A função de Lagrange ($\mathcal{L}$) é dada por

$$\mathcal{L} = \sum_{t=0}^{\infty} \left\{ \beta^t u(c_t) - \lambda_t [c_t + k_{t+1} - (1-\delta)k_t - f(k_t)] \right\} \ .$$

As condições de primeira ordem são

$$\beta^t u'(c_t) = \lambda_t \ , \tag{1}$$
$$-\lambda_t + \lambda_{t+1}[1 - \delta + f'(k_{t+1})] = 0 \ , \tag{2}$$
$$c_t + k_{t+1} - (1-\delta)k_t = f(k_t) \tag{3}$$

e

$$\lim_{t\to\infty} \lambda_t k_{t+1} = 0 \ . \tag{4}$$

No tocante a caracterização, observe que (2) é equivalente a

$$\frac{\lambda_{t+1}}{\lambda_t} = \frac{1}{1 - \delta + f'(k_{t+1})},$$

ao passo que (1) implica que

$$\frac{\lambda_{t+1}}{\lambda_t} = \frac{\beta u'(c_{t+1})}{u'(c_t)}.$$

Combine as duas últimas igualdades para concluir que

$$\frac{\beta u'(c_{t+1})}{u'(c_t)} = \frac{1}{1 - \delta + f'(k_{t+1})}. \tag{5}$$

Adicionalmente, juntas (1) e (4) implicam que

$$\lim_{t\to\infty} \beta^t u'(c_t) k_{t+1} = 0 \ . \tag{6}$$

Dito isto, a solução é caracterizada pelas seguintes três igualdades: (3), (5) e (6).